一般力学系と場の幾何学

東京理科大学教授
理学博士
大 森 英 樹 著

東京　裳　華　房　発行

MECHANICS AND GEOMETRY OF FIELDS

by

HIDEKI OMORI

SHOKABO

TOKYO

序

人は産まれ落ちた瞬間から神の御手の中に居て，常にその中で暮しているものだから，逆にその存在に気付くのは難しいことなのであるというようなことを昔牧師さんから聞いたことがある．神様のことは知らないが，同じ理由によって我々は時空というものをあまり意識せず，あまり疑問を持たずに暮している．

現実の時空と数学とは幾何学を接点としてつながっているのであるが，現代幾何学では時空などとは口にしないで，その代りにひたすら多様体を扱うことが主流になっている．数学的対象というのは，一度それが定義されてしまえばそれが現実のものと関係があろうがなかろうが，数学的対象として一人歩きできる．数学の問題は数学の中で閉じ切ってしまうが故に，数学の問題自身には数学者の意識を強制的に変革させる力はないのである．

見ようとしていない者には何も見えないし，聞こうとしていない者には何も聞こえはしない．それ故，数学の変革は常に，新種の数学の発生という形で起るのである．一体，我々は現実の時空を多様体と断定してしまういかなる理由を持ち合わせているというのだろうか？

この疑問はあまりにも素朴である．一体どのような形でこの疑問を数学の中に登場させられるのだろうか？　本書はその考え方の一つを述べる為に書かれている．無論，上の素朴な疑問に対する完全な答というものは無い．しかし，非可換幾何学を考えることで，このような疑問を数学の問題として登場させられると筆者は考えている．しかし，時空を問題にするといっても，数学で考えることは，その時空内での幾何学を問題とするという意味であって，実験器材を用いて直接現実の時空に立ち向うという意味ではない．

1991年 7月

著　　者

〈問題意識〉

本書を読むにあたっては，読者は以下のような問題意識をぜひ持ってもらいたいと著者は願っている．この問題の本当の解答は無論，未来永劫，無いのだが，そういう問題こそ，数学を数学たらしめているのだということを知ってほしいのである．

問題を述べるのは簡単である．「点とは，そして直線とは何であるか？」というものである．

「今，何時か？」と聞かれれば誰でも答えられるであろうが，「時とは何か」と聞かれれば答を出せる人は居ないであろう．上の問いも同じようなものである．「知っているつもり」と「本当に知っている」ことの差は大きいのである．また，「点とは何か」ということとも深く関係するが，もう少し，数学的に，「関数とは何か」という問題意識も同時に持ってもらいたい．

目　次

第 I 部　古典的アプローチ

第II部 場の古典幾何学から量子場へ

第 I 部

古典的アプローチ

「直線とは，点とは？」という問題意識を持ってもらいたい，と最初に述べたのだが，第 I 部では「点とは？」ということは問題にしないで，ひたすら「直線とは？」を問題にする．このことは，点集合としての空間（多様体）を先験的に与えられているものと考え，ひたすらその上の運動学を扱うということを意味する．

変分原理が，ここでは「直線」なる概念をきめる重要な原理として登場するが，「何故，変分原理が重要な原理なのか」という大問題には，このような古典的立場では答えることができない．この問題は「点とは？」ということをはっきり意識しないかぎり，数学の問題として登場させることすら難しい問題なのである．

第1章　古典微分幾何

色々述べなければならないことがあるのだけれども，我々が素朴に持っている「直線」の概念は次の3つからできていると言って良いであろう：

（a）　光の影はまっすぐにできる．または，光は直進する．

（b）　ぴんと張った糸はまっすぐである．

（c）　力の働いていない物体は等速直線運動をする．

（a），（b）は小中学校で習うことであるが，（c）は，**ガリレオの慣性法則**と呼ばれていて，高校の物理で習うものである．（c）の内容がここでは一番難しいが，その分だけ数学的内容が明確である．

注意してもらいたいことは，（a）～（c）においては，「空間とは何であるのか」については全く何も述べられていないということである．

1°　デカルトの解析幾何

この章で上に述べた問題に対して古来どのような解答が与えられてきたのかを手短かに述べるのだが，まず初めに，デカルトが与えた解答を見よう．そのためには，次のような大前提が要るのである．

〈大前提〉「空間」は実数の3つ組 (x, y, z) の全体である．

無論，我々の素朴な「現実の空間」がこの大前提をみたすか否かについては疑問が残るであろうが，以下，この節では上の大前提には一切疑問を持た

ないで，これを受入れることにする．

実数の3つ組全体を $\boldsymbol{R}^3$ と書く．後の都合上，実数の n 個の組全体を $\boldsymbol{R}^n$ と書くことにする．ここではベクトル解析が使えるので，以下ではこれを使用する．

定義　空間 $\boldsymbol{R}^n$ の元を「**点**」と呼び，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\{t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\ t \in \boldsymbol{R}\}$ の形に表示される $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合を「**直線**」と呼ぶ．さらに，2点 P：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，Q：$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の間の **距離** $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ を，

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

と定義する．

問1　P, Q を結ぶ最短コースは P, Q を通る直線であることを示せ．

上のようなベクトル表示では，ガリレオの等速直線運動を表示することも簡単にできる．等速ということを，速度ベクトルが時間 t によらないことだと解釈すれば，1つの等速直線運動は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$$

で与えられるものである．しかし，上の式は1つの等速直線運動を表わしているのであって，「等速直線運動」という概念そのものを表示しているわけではない．これを表示するには，上の式から個別の運動にまつわる $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}$ を消せば良いのだから，「等速直線運動なるもの」の数学的表示は，

$$(1) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$$

となる．これが，デカルト流に表示された，力の働いていない物体の運動方程式である．(1) 式をみたさない運動をする物体があれば，それには何か「**力**」というものが働いていると考えねばならない．

「力」とか「質量」とかの概念は物理的概念であって，数学内の概念では

ないのであるが，デカルト流ベクトル解析を使えば明快に表現することができる．つまり，

（a）　力は，平行移動で同一視することをやめたベクトルとして表示される．始点が違えば，平行移動で重ねることができても，違う力であると考える．力のベクトルの始点のことを **着力点** と呼ぶ．

（b）　力を受けている物体の運動は等速直線運動からずれていく．このずれは力のベクトルの大きさに比例するが，物体の「重量」が大きければ大きい程変化を受けにくい．この感覚を式で表現すると，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{F} \tag{2}$$

となる．$\boldsymbol{F}$ は力のベクトル，m は **慣性質量** と呼ばれる数量である．

(2) を **ニュートンの運動法則** と呼ぶ．このようにデカルトの解析幾何を使えば多くのものが明快に表現されるがそれは，「空間」を $\boldsymbol{R}^3$ とか $\boldsymbol{R}^n$ と断定してしまったからできたことなのである．

2° 束縛運動とガリレオの直線

空間を $\boldsymbol{R}^3$ と断定せず，もう少し自由に考えるにはどうすれば良いか．世間から気違い扱いされずにそれを行う最も良い方法は，既製のものの中に新しい芽を含んだモデルを1つ作ってみせることである．

次ページの図1のごとく，$\boldsymbol{R}^3$ 内に1つの曲面 S を考える．S は2つのパラメーター (u_1, u_2) を用いて，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$$

で表示されているものとする．ただし (u_1, u_2) は $\boldsymbol{R}^2$ 内のある領域内を動くものとし，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$ は各点で1次独立とする．

さらに，空想力を一寸働かせて，曲面 S 内に住みついてここから出ること

のできない2次元的生物 を1匹想像する． にとっては S のみが宇宙である．問題は「 にとって，ガリレオの慣性法則はどのような形になるか」ということである．

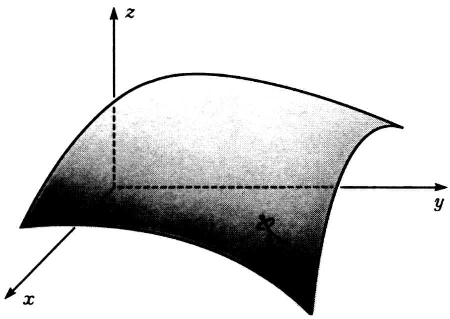


図 1 曲面 S 内に住みついた2次元的生物

そのために，次の仮定をおく：

〈仮定〉 $\boldsymbol{R}^3$ 内ではニュートンの運動法則 (2) が成立する．

上の仮定の下で，S 内に束縛されていて，S から出ることのできない物体の運動を考える．物体に何の力も働いていないのだとすると，物体は等速直線運動をし，曲っている S からはみだしてしまうのだから，S に束縛されているからには物体は何らかの力を受けているとしなければならない．そういう力を常に受けとる結果，物体は S に束縛されるのだと考える．この力を**束縛力**と呼ぶのだが，これは にとっては力が働いていないのと同じ意味となるものでなければならない．これより，束縛力は曲面 S に垂直なベクトルでなければならないことがわかる．したがって，以下で考察するのは，

「S に垂直な方向のみから力を受けて S に束縛されてしまう物体の運動は何か」

という問題である．これは にとっては「力の働いていない物体の運動」と同義である．

まず $\boldsymbol{R}^3$ 内のベクトル解析を使って上の問題を考えよう．

物体の質量は1とし，物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とする．$\boldsymbol{r}(t)$ の終点は常に S 内にあるのだから，

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$$

と書いて良い．曲面 S の点Pにおける **単位法ベクトル** を $\boldsymbol{n}(\mathrm{P})$ とすると，上のことは，

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\,\boldsymbol{n}(\mathrm{P}) \qquad (\mathrm{P}\text{は}\ \boldsymbol{r}(t)\ \text{の終点})$$

と書ける．S の点Pはパラメーター $(u_1,\ u_2)$ によってきまり，単位法線 $\boldsymbol{n}$ は $(u_1,\ u_2)$ を使えば，

$$(1) \qquad \boldsymbol{n}(u_1,\ u_2)=\frac{1}{\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$$

と書けるのだから

$$(2) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))=\lambda(t)\,\boldsymbol{n}(u_1(t),\ u_2(t))$$

と書ける．λ は未知関数である．合成関数の微分の公式により，左辺を計算すれば，

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{d^2u_i(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i\partial u_j}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda\boldsymbol{n}(u_1(t),\ u_2(t))$$

を得る．これは簡略化して，

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\frac{d^2u_k(t)}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i\partial u_j}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt}=\lambda\boldsymbol{n}$$

と書くのが普通である．

ところで，偏微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$ は，u_2 を一定に保ってできる曲線（図2）の接線だから当然 S に接しており，したがってその点の単位法線と直交している．こ

れは $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$ についても同様である．つまり，(4) の第 1 項は S の接平面内にあるベクトルである．

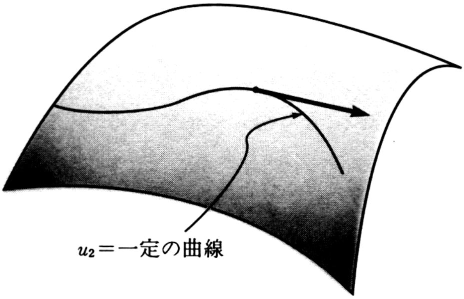


図 2　偏微分の意味

一方，S 内の点 P で，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$, $\boldsymbol{n}$ を考えると，この 3 本のベクトルですべてのベクトルを表わすことができるから，ベクトル

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j}, \qquad 1 \leqq i,\ j \leqq 2$$

を，**接平面成分** と，**法成分** とに分解して，

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j}(u_1,\ u_2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1,\ u_2)\,\Gamma_i{}^k{}_j(u_1,\ u_2) + \boldsymbol{n}(u_1,\ u_2)\,h_{ij}(u_1,\ u_2)$$

と書いておこう．$\Gamma_i{}^k{}_j(u_1,\ u_2)$，$h_{ij}(u_1,\ u_2)$ は数であって，ベクトルではないことを注意しておく．そうすると，(4) は，

$$(6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left(\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_i{}^k{}_j(u_1(t),\ u_2(t))\,\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt} \right) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(u_1(t),\ u_2(t))\,\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda \end{cases}$$

という 2 つの式に分解できる．$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$ は 1 次独立であるから，第 1 の式の各成分が 0 でなければならない．よって，上の式は，

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u_k(t)}{dt^2}+\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_i{}^k{}_j(u_1(t),\ u_2(t))\dfrac{du_i(t)}{dt}\dfrac{du_j(t)}{dt}=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=1,\ 2) \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}h_{ij}(u_1(t),\ u_2(t))\dfrac{du_i(t)}{dt}\dfrac{du_j(t)}{dt}=\lambda \end{cases}$$

という 3 本の連立方程式になる．曲面 S の各点で $\Gamma_i{}^k{}_j$ と h_{ij} とをあらかじめ計算しておいたとすれば，(7) 式は一応微分方程式の形である．しかし，(7) の第 3 の式は，S に垂直な成分を書いたものであるから，  にとっては何の意味を持ち得ない式である．以下では，(7) 式の最初の 2 本の式(接平面成分の式) のみを問題にする．

そこで，$\Gamma_i{}^k{}_j(u_1,\ u_2)$ の計算法を考えるのだが，我々は  にとって，「力の働いていない物体の運動とは何か 」を問題にしているのだから，$\Gamma_i{}^k{}_j$ も， にとって理解できるはずの量のみを使って計算しなければならない．

（**A**）　曲線の長さ：　S 内に描かれた曲線は，

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$$

と表示される．その長さは，  にとっても意味があるはずだが，それは，**内積**・を使って，

$$\int_a^b\left\|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right\|dt=\int_a^b\left(\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

だから，

$$\int_a^b\left(\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_j}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

となる．そこで，

$$g_{ij}(u_1,\ u_2)=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_i}(u_1,\ u_2)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_j}(u_1,\ u_2),\qquad 1\leqq i,\ j\leqq 2$$

とおき，これを曲面 S の **第 1 基本量** と呼ぶ．  が曲線の長さを計るすべを持っているということは，第 1 基本量なる 4 つの関数をすでに知っているものと考えて良い．

したがって，g_{ij} を使って $\Gamma_i{}^k{}_j$ が計算できれば良い．

（**B**） クリストッフェル記号：  が微積分を知っていると仮定して，g_{ij} を u_k で偏微分してみると，容易に，

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma_k{}^l{}_i g_{lj} + g_{il} \Gamma_k{}^l{}_j \right)$$

を得る．そこで，

$$[k\,i\,;\ j] = \sum_{l=1}^{2} \Gamma_k{}^l{}_i g_{lj}$$

とおけば，$g_{ij} = g_{ji}$ であることに注意して，

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = [k\,i\,;\ j] + [k\,j\,;\ i]$$

を得る．さらに，$\Gamma_i{}^l{}_j = \Gamma_j{}^l{}_i$，したがって $[i\,j\,;\ k] = [j\,i\,;\ k]$ であることに注意して，次を計算すると，

$$(8) \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = 2[i\,j\,;\ k] = 2\sum_{l=1}^{2} \Gamma_i{}^l{}_j g_{lk}$$

となることがわかる．

（**C**） 逆行列： ところで，$g_{ij} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}$ で，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$ は 1 次独立だから，行列 (g_{ij}) は正則行列である．つまり， が知っているはずの第 1 基本量は行列として見れば対称でかつ正則な行列のはずである．(g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と書き (8) の両辺に g^{mk} をかけて k で和をとると，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) = \sum_{k,l=1}^{2} \Gamma_i{}^l{}_j g^{mk} g_{kl}$$

$$= \sum_{l=1}^{2} \Gamma_i{}^l{}_j \delta_l{}^m = \Gamma_i{}^m{}_j$$

となり $\Gamma_i{}^m{}_j$ が求まる．左辺は面倒な式なので，

$$(9) \qquad \left\{ \begin{matrix} m \\ i\,j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

という記号を用いることが多い．これを **クリストッフェル記号** と呼ぶ．$\Gamma_i{}^k{}_j = \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\}$ だから，これを用いて (7) の最初の式を書けば，

$$\frac{d^2u_k(t)}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{2}\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt}=0 \qquad (k=1,2) \tag{10}$$

という連立微分方程式を得る．$\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$ は g_{ij} を知っている  には理解できるからこれで(10)は  にとって意味のある式となり，これが  にとっては「ガリレオの慣性法則」を表わす式となる．

3° 変分法（オイラーの直線）

 は曲線の長さが測れるのだから2点を結ぶ最短コースという考え方ができる．この節で，最短コースがみたす微分方程式を求める．問1に対する答もこの中に含まれている．

曲面 S 内の曲線を，

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$$

とすれば，その長さは，$\alpha \leqq t \leqq \beta$ の範囲では

$$L=\int_\alpha^\beta\left(\sum_{i,j}g_{ij}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

で与えられる．両端点P, Qは S 内で固定されているものとし，PとQを結ぶ S 内の曲線の全体 $\Omega_{\mathrm{P,Q}}$ を考えよう．$\Omega_{\mathrm{P,Q}}$ は次元が ∞ の集合なので全体像はつかみにくいが，この集合を頭の中に登場させることは重要なので，もう少し詳しく述べよう．

まず，曲面 S を表示するときに使ったパラメーター $(u_1,\ u_2)$ であるが，これは $\boldsymbol{R}^2$ の中の，図3のような連結な開集合 D 内を動きまわるものとする．S 上の2点 P, Qは

$$\mathrm{P}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a_1,\ a_2), \qquad \mathrm{Q}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(b_1,\ b_2)$$

と表わされているものとする．

P, Qを S 内で結ぶ曲線とは，$(u_1,\ u_2)$ が D 内で $(a_1,\ a_2)$ から $(b_1,\ b_2)$ まで

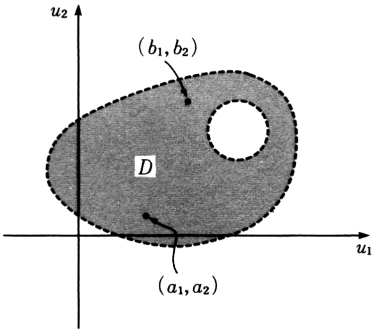


図 3　パラメーターの動く範囲

ジャンプすることなく連続的に動いたときの位置ベクトルの動きとして表わせるもののことだから(図4)，次のような手順で巨大な集合を順次頭の中に構成する：

(イ)　閉区間 $[0, 1]$ から $\boldsymbol{R}^2$ の中への C^∞ 級写像の全体を考える．これは，$[0, 1]$ 上の実数値 C^∞ 級関数の組 $(f_1(t), f_2(t))$ 全体と同じである．

(ロ)　上の部分集合として，$t=0$ において (a_1, a_2)，$t=1$ において (b_1, b_2) となるもの全体を考え，これを $\Omega((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ とする．これの元は $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ などと書く．

(ハ)　$\Omega_{\mathrm{P,Q}} = \{\, \boldsymbol{r}(u_1(\cdot), u_2(\cdot))\,;$

$$(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in \Omega((a_1, a_2), (b_1, b_2))\,\}.$$

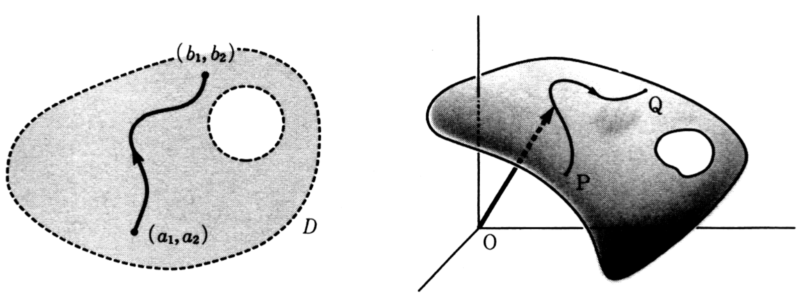


図 4　パラメーターの空間 D 内を点が動くことによって S 内の曲線が作られる．

(　) の中の・の所は [0, 1] 内を動く変数 t が入る場所である．

さて，P, Q を結ぶ最短コースが，$\Omega_{P,Q}$ の中にあるものとして，それを，

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)), \qquad (\bar{u}_1(\cdot), \bar{u}_2(\cdot)) \in \Omega((a_1, a_2), (b_1, b_2))$$

としよう．次に両端 P, Q は固定したまま，この曲線をパラメーター μ によって動かして，それを

$$\boldsymbol{r}_\mu(t) = \boldsymbol{r}(\bar{u}_1(t) + \mu v_1(t), \bar{u}_2(t) + \mu v_2(t))$$

とする．ただし，v_1, v_2 は [0, 1] 上 C^∞ 級で，

$$v_i(0) = v_i(1) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

である．（P, Q が固定されているのだから．）　さらに，この曲線の長さを $L(\mu)$ とする．$\mu = 0$ のときに最短コースであったから，

$$L(\mu) \geqq L(0)$$

である．$u_{\mu,i}(t) = \bar{u}_i(t) + \mu v_i(t)$ とすると，

$$L(\mu) = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} g_{ij}(u_{\mu,1}(t), u_{\mu,2}(t)) \frac{\partial}{\partial t} u_{\mu,i}(t) \frac{\partial}{\partial t} u_{\mu,j}(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

積分記号の中味は，μ に関して C^1 級で，微分したものも [0, 1] 上で連続だから，$L(\mu)$ も μ について微分可能であり，しかも，微分と積分の順序交換ができて，

$$\frac{d}{d\mu} L(\mu) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \mu} (\cdots\cdots)^{\frac{1}{2}} dt$$

となる．$g_{ij} = g_{ji}$，$\dfrac{\partial^2}{\partial t\, \partial \mu} = \dfrac{\partial^2}{\partial \mu\, \partial t}$ に注意して計算すれば，$\mu = 0$ においては，次の式が得られる：

$$\frac{d}{d\mu} L(\mu)\Big|_{\mu=0} = \int_0^1 \frac{1}{V(t)} \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial \mu} g_{ij}(\quad)\Big|_{\mu=0} \frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} \frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} \right.$$
$$\left. + 2 \sum_{i,j} g_{ij}(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) \frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} \frac{dv_j(t)}{dt} \right\} dt$$

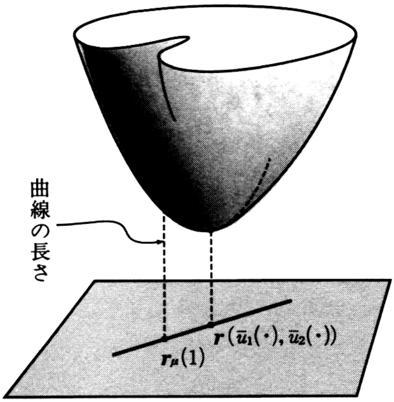
ただし，

$$V(t) = \left(\sum_{i,j} g_{ij}(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) \frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} \frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mu=0$ の所で長さが最小となるのだから，$\mu=0$ の所で

$$\frac{d}{d\mu}L(\mu)\,|_{\mu=0}=0$$

とならなければならない．しかも，このことは，$(v_1,\ v_2)$ の選び方に無関係に常にこうなっていなくてはならない．頭の中では図5のようなことを想像してもらいたい．



$\Omega_{P,Q}$ なる∞次元集合

図 5 「曲線の長さ」という関数のグラフ

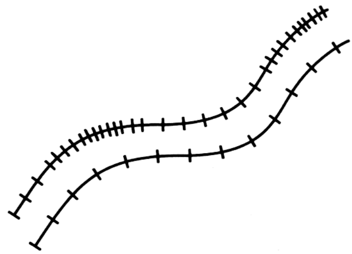


図 6 同じ曲線でも目盛のふり方が違うと $\Omega_{P,Q}$ の元としては違う元となる．

さらに計算を進めるために，次のことにまず注意する．$\Omega_{P,Q}$ の元は，図形的には同じ曲線であっても，図6のように違うパラメーター表示を持つ場合には別々の元だとされている．これでは不便だから，曲線をパラメーター表示するときには，それによる曲線上の目盛りが等間隔になるようにパラメーターを選ぶものと約束する．このようなパラメーターを **等速のパラメーター** と呼ぶ．

等速のパラメーター t を使った場合には，$V(t)=V$ (＝一定) であり，V はその曲線の長さとなる．

等速のパラメーターが使われているとして，さらに部分積分を使えば，前式は

$$0=\frac{d}{d\mu}L(\mu)\,|_{\mu=0}$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^1\sum_{k=1}^{2}\left\{\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(\,\bar{u}_1(t),\ \bar{u}_2(t)\,)\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt}\frac{d\bar{u}_j(t)}{dt}\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dt}\left(g_{ik}(\,\bar{u}_1(t),\ \bar{u}_2(t)\,)\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt}\right)\right\}v_k(t)\,dt$$

となる．ここで，$(\,v_1(t),\ v_2(t)\,)$は，$t=0,\,1$ なる両端で 0 となるものなら何でも良いのだから，上の式が成立するのは｛　｝の中が 0 となる場合に限られる．つまり，

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dt}\left(g_{ik}(\,\bar{u}_1(t),\ \bar{u}_2(t)\,)\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(\,\bar{u}_1(t),\ \bar{u}_2(t)\,)\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt}\frac{d\bar{u}_j(t)}{dt}=0\qquad(\,k=1,\,2\,)$$

これが等速のパラメーターを使ったとき，最短コースがみたすべき微分方程式である．この式は，

$$(1)\quad \sum_i\frac{d}{dt}\left(g_{ik}\frac{d\bar{u}_i}{dt}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\frac{d\bar{u}_i}{dt}\frac{d\bar{u}_j}{dt}=0\qquad(\,k=1,\,2)$$

と略記されるのが普通である．もっと計算を進めれば，

$$\sum_i g_{ik}\frac{d^2\bar{u}_i}{dt^2}+\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}\frac{d\bar{u}_j}{dt}\frac{d\bar{u}_i}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\frac{d\bar{u}_i}{dt}\frac{d\bar{u}_j}{dt}\right)=0$$

$$(\,k=1,\,2\,)$$

これは，次の式と同じである：

$$(2)\qquad \sum_i g_{ik}\frac{d^2\bar{u}_i}{dt^2}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)\frac{d\bar{u}_i}{dt}\frac{d\bar{u}_j}{dt}=0$$

$$(\,k=1,\,2\,)$$

等式の両辺に$(\,g_{ik}\,)$の逆行列$(\,g^{lk}\,)$をかけて k で和をとると，$\sum_k g^{lk}g_{ki}=\delta_i^l$ だから，前節の (8) を使って

$$(3)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\bar{u}_l(t)+\sum_{i,j}\left\{\begin{matrix} l\\ i\,j\end{matrix}\right\}\frac{d\bar{u}_i}{dt}\frac{d\bar{u}_j}{dt}=0\qquad(\,l=1,\,2\,)$$

を得る．これは前節の (10) と同じものである．つまり，  にとって最短コースを与える曲線は，（そういうものが存在するとして）等速のパラメーターで表示すれば，ガリレオの慣性法則を表わす微分方程式と同じとなる．

微分方程式 (3) は，**測地線の方程式** と呼ばれる．

以上の計算では，最短コースがあると仮定して話を進めてきたのであるが，  が最短コースを実際に求めるには，P, Q の間に糸をぴんと張れば良いのだから，最短コースの存在は直観的には明らかであろう．しかし，(3) を導くときには，$\dfrac{dL(\mu)}{d\mu}=0$ を使ったのであって，最短であるということを使ったのではないから，最短コースは (3) の解でなければならないが，その逆は一般には正しくない．(3) の式をみたす曲線を **測地線** と呼ぶが，P, Q を結ぶ測地線がすべて P, Q を結ぶ最短コースというわけではない．

4° 加速度と平行移動

S 内の物体の運動で，測地線の方程式をみたさないものを見たら，  はどのように感じるであろうか？ 当然，「この物体には（束縛力以外の）何らかの力が加わった」と考えるはずである．**2°** の (4) 式，(6) 式を使えば，力が加わっている場合には，

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\Bigg(\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j}\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt}\Bigg) \neq \boldsymbol{0}$$

となる．この左辺は，S 上の点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ における接ベクトルであることに注目してもらいたい．**1°**の (2) 式からの類推で，S 上におけるニュートンの運動法則としては，

$$(2)\qquad m\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left(\frac{d^2u_k}{dt^2}+\sum_{i,j}\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}F_k$$

と考えて良いであろう．この理解では，(1) の左辺を加速度ベクトルと考えるわけである．この場合には，速度ベクトルも，力のベクトル同様，平行移動で同一視を行わず，始点が違えば違うベクトルと考える方が良い*)．速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は，$\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ を始点とするベクトルで

$$(3)\qquad \boldsymbol{v}(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$$
$$=\sum\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_i}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i(t)}{dt}$$

で与えられる．

加速度とは，言うまでもなく，速度ベクトルの微分と考えられているものだから，

$$(4)\qquad \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}(\boldsymbol{v}(t+\delta)-\boldsymbol{v}(t))$$

と定義すれば良さそうに見えるが，$\boldsymbol{v}(t+\delta)$ の始点と，$\boldsymbol{v}(t)$ の始点が違うので単純に $\boldsymbol{v}(t+\delta)-\boldsymbol{v}(t)$ を計算することはできないし，$\boldsymbol{R}^3$ の中で平行移動で同一視して計算すると，**2°** の (4) 式のように S に垂直な成分が出てきて，  にとっては，無意味な式となる．(4) 式の計算のためには，$\boldsymbol{r}(u_1(t+\delta),\ u_2(t+\delta))$ の所から生えている $\boldsymbol{v}(t+\delta)$ を，$\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ の所まで " 平行移動 " して $-\boldsymbol{v}(t)$ との合成をしなければならないのだが，前の計算結果を考慮して，  にとって $\boldsymbol{v}(t+\delta)$ を $\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ の所まで「平行移動」したもの $\tau_\delta\boldsymbol{v}(t+\delta)$ は

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\Bigg(v_k(t+\delta)$$
$$+\delta\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i}{dt}(t)\,v_j(t+\delta)\Bigg)$$

となると考えよう．ただし，$v_k(t')=\left(\frac{d}{dt}u_k\right)(t')$ である．こうすれば，

---

*)　S 上で考えるときには，ベクトルを「変位」と考えてはいけない．始点が違えば違うベクトルと考える．

$$(6)\qquad \boldsymbol{v}(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\,v_k(t)$$

だから，

$$(7)\qquad \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\{\tau_\delta \boldsymbol{v}(t+\delta)-\boldsymbol{v}(t)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\left\{\frac{dv_k}{dt}(t)\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i(t)}{dt}v_j(t)\right\}$$

となって，これが  にとっての加速度ベクトルの式となる．

(5) 式は，これまでの計算と直観がうまく合うようにあてずっぽうに「平行移動」なるものをきめてしまった式だから，この式が何を意味するのかもう少し詳しく見ておこう．(5) 式では，平行移動の方向と，平行移動されるベクトルの方向が一致しているかに見えるが，$\boldsymbol{v}(t+\delta)$ と $\boldsymbol{v}(t)$ とは始点が違うのだから，δ を無限小だと思って，「$\boldsymbol{v}(t+\delta)$ を $-\boldsymbol{v}(t)$ の方向に平行移動する」と言うときの $\boldsymbol{v}(t+\delta)$ と $-\boldsymbol{v}(t)$ とには何のつながりもない．そうだとすれば，平行移動されるものは $\boldsymbol{v}(t+\delta)$ に限らず $\boldsymbol{r}(u_1(t+\delta),\ u_2(t+\delta))$ を始点にする，どんな接ベクトルでも良いはずである．このように考えて，次のような定義をする：

定義　δ を無限小とし，

$$\boldsymbol{w}(t+\delta)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t+\delta),\ u_2(t+\delta))\,w_k(t+\delta)$$

を $\boldsymbol{r}(u_1(t+\delta),\ u_2(t+\delta))$ より生えている接ベクトルとする．$\boldsymbol{w}(t+\delta)$ を（曲線 $\boldsymbol{r}(u_1(\cdot),\ u_2(\cdot))$ に沿って）$\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ まで「**平行移動した**」もの $\tau_\delta \boldsymbol{w}(t+\delta)$ とは，

$$\tau_\delta \boldsymbol{w}(t+\delta)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\left\{w_k(t+\delta)\right.$$

$$\left.+\delta\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i}{dt}(t)\,w_j(t+\delta)\right\}$$

である．このように拡大解釈した平行移動の定義を，**レビ・チビタ**（Levi-Civita）**の平行移動** と呼ぶ．

上で与えた無限小平行移動の概念を，内容を変えずに無限小を使わない数学に翻訳しよう．

S 内に C^1 級の曲線 $c=\{\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))\ ;\ t\in[0,\ 1)\}$ を考え，その各 $\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ から接ベクトル $\boldsymbol{w}(t)$ が生えているものとする．このような $\{\boldsymbol{w}(t)\ ;\ t\in[0,\ 1)\}$ を，c に沿う **接ベクトルの場** と呼ぶ，δ を無限小とし，δ^2 以上の項を無視すれば

$$(8)\qquad \frac{1}{\delta}\{\tau_\delta\boldsymbol{w}(t+\delta)-\boldsymbol{w}(t)\} = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left\{\frac{dw_k}{dt}(t)+\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}\frac{du_i}{dt}(t)\,w_j(t)\right\}$$

となる*)．　右辺には無限小が入っていないから，次のような定義をする．

定義　$\boldsymbol{r}(u_1(0),\ u_2(0))$ から生えている接ベクトル $\boldsymbol{w}(0)$ を c に沿って $\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ まで平行移動したベクトル $\boldsymbol{w}(t)$ とは，微分方程式

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\left\{\frac{dw_k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i}{dt}(t)\,w_j(t)\right\}=\boldsymbol{0}$$

を，初期条件 $\boldsymbol{w}(0)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(0),\ u_2(0))\,w_k(0)$ の下で解いたときの解 $\boldsymbol{w}(t)$ のことである．

このように定義すると，解が存在するかどうかが気になるであろうが，上

---

*）　このような計算は 10 年程前までは，「不正確」だと言われて大変に嫌われたのだが，最近，non standard analysis の普及によって，極めて正確な意味のあることが，一般的に認められるようになってきた．

の微分方程式は線形の常微分方程式なので解の存在と一意性は保証されている．直観的には無限小平行移動を繰返して解 $\boldsymbol{w}(t)$ が作られる*) のだから存在と一意性は明らかであろう．

また，次のような，存在と一意性をぼかした述べ方もできる：（記号の意味はこれまで通りとして…）

定義 曲線 c に沿うベクトル場 $\boldsymbol{w}(t)$ が c に沿って **平行** であるとは，$\boldsymbol{w}(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\,w_k(t)$ が，

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\left\{\frac{dw_k}{dt}(t)+\sum_{i,j=1}^{2}\left\{{k \atop ij}\right\}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i}{dt}(t)\,w_j(t)\right\}=\mathbf{0} \tag{10}$$

をみたす場合を言う．

(8) 式の左辺は，h を微小な数とすれば

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\tau_h\boldsymbol{w}(t+h)-\boldsymbol{w}(t)\}$$

とも考えられるから，一種の微分であると考えて，

$$\begin{aligned}&\nabla_{X(t)}\boldsymbol{w}(t)\\&=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\left\{\frac{dw_k}{dt}(t)+\sum_{i,j}\left\{{k \atop ij}\right\}\frac{du_i}{dt}(t)\,w_j(t)\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

と定義し，これを $\boldsymbol{w}(t)$ の $X(t)$ による **共変微分** と呼ぶ．ただし，$X(t)$ は曲線 c の接ベクトル

$$X(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_k}{dt}(t) \tag{12}$$

である．

---

*) この部分を数学的に明確にすると，積積分（product integral）の概念となる．

この記号の下では，$\boldsymbol{w}(t)$ が c に沿って平行であるとは $\nabla_{X(t)}\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{0}$ となることであり，c が測地線であるとは，$\nabla_{X(t)}X(t)=\boldsymbol{0}$ となることと同じである．

この節の残りの頁で (11) で定義された共変微分の計算法を整理しておこう．(11) 式で $w_1(t)\equiv 1$，$w_2(t)\equiv 0$ とおけば，

$$\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}=\sum_{k,i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,1\end{matrix}\right\}\frac{du_i}{dt}(t).$$

$w_1(t)\equiv 0$，$w_2(t)\equiv 1$ とおけば，

$$\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}=\sum_{k,i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,2\end{matrix}\right\}\frac{du_i}{dt}(t)$$

を得る．$\dfrac{du_i}{dt}(t)$ は $X(t)$ の成分だから $X^i(t)$ と書くことにすれば，

$$\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\sum_{k,i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}X^i(t)\qquad (j=1,\ 2)\tag{13}$$

という式となる．$A_j^k(t)=\sum_{i=1}^{2}\left\{\begin{matrix}k\\ i\,j\end{matrix}\right\}X^i(t)$ とおけば，

$$\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k}A_j^k(t)\tag{14}$$

となって，$\nabla_{X(t)}$ なる線形写像を基底 $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1},\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right)$ を使って表示した行列が，$(A_j^k(t))$ であることがわかる．さらに，$f(t)$ を，曲線 c 上で定義された C^1 級の関数とすると，(11) において，$w_j(t)\equiv f$，他の成分 $\equiv 0$ とおいて，

$$\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}f=\left(\nabla_{X(t)}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}\right)f(t)+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{df}{dt}(t)\tag{15}$$

となることもわかり，共変微分の計算は，普通のライプニッツ規則に従っていることがわかる．逆に，(13) と (15) だけから (11) を得ることができるから，共変微分の計算のためには (13) 式のみを記憶しておれば良い．

最後に，次のことを注意しておこう．$f(t)$ が単に t の関数として与えられているのでなしに，曲線 S 上の関数 F の C への制限として，

$$f(t) = F(\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t)))$$

の形で与えられている場合には，$f(t) = \tilde{f}(u_1(t),\ u_2(t))$ と考えて，つまり，曲面 S 上で定義されている関数 F も，計算上は，パラメーター $(u_1,\ u_2)$ の関数なのだから，$F(\boldsymbol{r}(u_1,\ u_2)) = \tilde{f}(u_1,\ u_2)$ と考えることにして，

$$\frac{df}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_k}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_k}{dt}(t) \tag{16}$$

と書ける．次節で詳しく述べるが，これは大変に大きな考え方の転換を要求しているのである．

5° ポアンカレの上半平面宇宙

これまでの計算から， が「力の働いていない物体の運動」を理解するには，単に第 1 基本量 $(g_{ij}(u_1,\ u_2))$ のみを知っていれば良い．つまり，自分達の宇宙で，曲線の長さの計り方さえ知っておれば良いということがわかる． にとっては S の外側など理解を越えるものであるわけだから，外側がデカルト的数空間であるか否かなどということは問題にすることすら無意味なことなのである．

そこで，これまでは曲面 S とは「パラメーター $(u_1,\ u_2)$ が $\boldsymbol{R}^2$ のある領域 D を動きまわったとき，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(u_1,\ u_2)$ 全体のなす集合」と考えてきたのであるが，この考え方を変えて，$\boldsymbol{r}(u_1,\ u_2)$ なる位置ベクトルが意味を持たなくなるような考え方をしてみよう．

話を具体的にするために，以下では D を上半平面，

$$D = \{(u_1,\ u_2) \in \boldsymbol{R}^2;\ u_2 > 0\}$$

とし， はこの D の中にいるものとしよう．つまり，D を宇宙と考えるのであるが，曲線の長さを測るために与えられる第 1 基本量 $(g_{ij}(u_1,\ u_2))_{1 \leq i,j \leq 2}$ が，

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{{u_2}^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であるとしよう．これは **ポアンカレの計量** と呼ばれるものである．D 内の曲線 ($u_1(t)$, $u_2(t)$)，$0 \leqq t \leqq 1$，の長さは，

(1) $$\int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u_2(t)} \left(\left(\frac{du_1}{dt}(t) \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dt}(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

で与えられる．

$\boldsymbol{R}^2$ の u_1 軸は D の境界，つまり D なる宇宙の果てであるが，D 内の曲線 ($u_1(t)$, $u_2(t)$)，$0 \leqq t < 1$，で $t \to 1$ で宇宙の果てに達するもの，つまり $\lim_{t \to 1} u_2(t) = 0$ となるような曲線を考えれば，その長さは ∞ となる．なぜなら，

$$\lim_{T \to 1} \int_0^T \frac{1}{u_2(t)} \left(\left(\frac{du_1}{dt}(t) \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dt}(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \geqq \lim_{T \to 1} \int_0^T \frac{1}{u_2(t)} \left| \frac{du_2}{dt}(t) \right| dt$$

であるが，$t \nearrow 1$ のとき，$u_2(t) \searrow 0$ となることを考えて，

$$\left| \frac{du_2}{dt}(t) \right| \geqq -\frac{du_2}{dt}(t)$$

を使えば，

$$\text{右辺} \geqq \lim_{T \to 1} \int_0^T -\frac{1}{u_2(t)} \frac{du_2}{dt}(t)\, dt = \lim_{u_2 \to 0} \Big[-\log u_2 \Big]_{u_2(0)}^{u_2} = \infty$$

となるからである．

この宇宙 D でも **3°** でやったようなオイラーの意味の直線 (最短コース) は考えられ，全く同じ計算で，等速のパラメーター t を使うと，

(2) $$\frac{d^2 u_i}{dt^2}(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix} \right\} (u_1(t), u_2(t)) \frac{du_j}{dt}(t) \frac{du_k}{dt}(t) = 0$$

($i = 1, 2$)

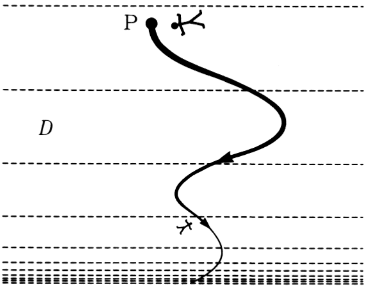


図 7　D という "宇宙" の果てまで達している曲線の長さはポアンカレ計量に関しては ∞ となる.

という式を得る. ただし, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ は **2°** の (9) で計算される. したがって, ポアンカレ計量の場合には, $g_{11} = g_{22} = 1/u_2{}^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ だから, $g^{11} = g^{22} = u_2{}^2$, $g^{12} = g^{21} = 0$ であり, 計算すれば,

$$(3)\qquad \left\{ {1 \atop 11} \right\} = \left\{ {1 \atop 22} \right\} = 0, \quad \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \left\{ {1 \atop 21} \right\} = -\frac{1}{u_2},$$
$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = -\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{1}{u_2}, \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = 0$$

を得る. よって, 測地線の微分方程式 (2) は,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} u_1(t) - 2\dfrac{1}{u_2(t)} \dfrac{du_1(t)}{dt} \dfrac{du_2(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} u_2(t) + \dfrac{1}{u_2(t)} \left\{ \left(\dfrac{du_1(t)}{dt} \right)^2 - \left(\dfrac{du_2(t)}{dt} \right)^2 \right\} = 0 \end{cases}$$

となる. $u_2 > 0$ に注意すれば, これは,

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{u_1'}{u_2} \right)' - \dfrac{u_1'}{u_2} \cdot \dfrac{u_2'}{u_2} = 0 \\ \left(\dfrac{u_2'}{u_2} \right)' + \dfrac{u_1'}{u_2} \cdot \dfrac{u_1'}{u_2} = 0 \end{cases}$$

と同じである.

測地線の方程式の一般解が求まるということはめったにないことであるが, (5) の一般解は次のようにして求めることができる.

まず，測地線の方程式は等速のパラメーターを使って書かれていることに対応するが，(5) より容易に，

$$\left(\left(\frac{u_1'}{u_2}\right)^2+\left(\frac{u_2'}{u_2}\right)^2\right)'=0\,.$$

これより，

$$(6)\qquad \left(\frac{u_1'}{u_2}\right)^2+\left(\frac{u_2'}{u_2}\right)^2=v^2\ (\text{一定})\qquad (v\geqq 0)$$

を得る．一方，$X(t)=u_1'/u_2$ とすると (5) の第 1 式より，$Xu_2'-X'u_2=0$ となり，$(X/u_2)'=0$ を得るから，

$$(7)\qquad \frac{u_1'}{u_2}=cu_2\,,\qquad c\text{：定数}$$

を得る．これを (6) に代入すると，

$$(8)\qquad c^2u_2{}^2+\left(\frac{u_2'}{u_2}\right)^2=v^2$$

となる．

(**a**)　$c=0$ の場合：　この場合は $u_1=$ 一定，$u_2'=vu_2$ だから $u_2(t)=ae^{tv}$，$a>0$，$v>0$，となる．これは u_2 軸に平行な直線を表わす．

(**b**)　$c>0$ の場合：(8) より，$cu_2\leqq v$ だから，

$$(9)\qquad u_2(t)=\frac{v}{c}\sin\theta(t)\quad (>0)$$

とおいて良い．これを (8) に代入して，

$$(10)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=v^2(\sin\theta(t))^2=c^2u_2{}^2>0\,.$$

したがって，$\theta'\neq 0$ であるから，$\theta=\theta(t)$ のグラフは t に関して常に右上りか，常に右下りかのどちらかとなり，逆関数の定理を使って，t を θ の関数として表わすことができる．また，$\theta'<0$ の場合には，t の向きを逆向きにすることにすれば，$\theta'>0$ と仮定してかまわない，したがって，

$$(11)\qquad \frac{d\theta}{dt}=v\sin\theta$$

を得る．これと (9) 式より，

$$\frac{u_2'}{u_2} = \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = v\cos\theta$$

これと (6) より，$u_1'/u_2 = v\sin\theta$ を得る．(9) と合わせて，

$$u_1'(t) = u_2(t)\, v\sin\theta(t)\,, \qquad u_2(t) = \frac{v}{c}\sin\theta(t)$$

となる．ここで，$t = t(\theta)$ と考えれば，

$$u_1 = \int \frac{du_1}{d\theta}\, d\theta = \int u_1' \frac{dt}{d\theta}\, d\theta = \int \frac{v}{c}\sin\theta\, d\theta = -\frac{v}{c}\cos\theta + a$$

（ a：定数 ）

となる．θ を独立変数と思えば，

(12) $$u_1(\theta) = -\frac{v}{c}\cos\theta + a\,, \qquad u_2(\theta) = \frac{v}{c}\sin\theta$$

となる．これは，u_1 軸上に中心を持つ半径 v/c の円を表わす．逆に，θ と t の関係を (11) のようにとれば，このような円はすべて (5) の解となる．

（**c**） $c < 0$ の場合： 実は，この場合は曲線のパラメーターの向きを変えることで (b) の場合に帰着できる．

以上をまとめると，測地線の方程式 (5) の一般解は，

（ i ） u_2 軸に平行な直線

（ ii ） u_1 軸上に中心を持つ任意の半径の円

を，等速のパラメーターでパラメーター表示したものであることがわかる．

読者は，次の演習問題を解くことで，この宇宙がどんな感じになっているかを  になったつもりでつかんでもらいたい．

問 1 D 内の 2 点 P, Q に対し，P, Q を通る測地線がただ 1 つ存在することを示せ．（ 図 8 参照 ）

問 2 無限に伸びた 1 本の測地線 l に対し，l 上にない勝手な点 P をとる．P を通って，l と全く交わらない無限に伸びた測地線が無数にあることを示せ．（ 図 9 参照 ）

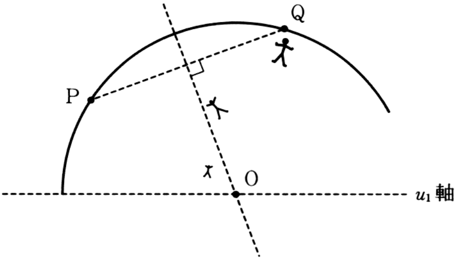


図 8 上半平面内の任意の2点 P, Q に対し P, Q を通り，中心を u_1 軸上に持つ円がただ1つ定まる．つまり，P, Q を通る“直線”がただ1つ定まる．

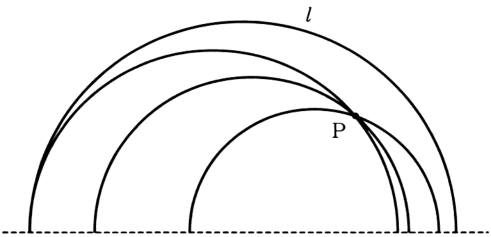


図 9 1直線 l 外の1点 P を通って l と交わらない直線が無数にある．

問 3 この宇宙で，三角形の内角の和は 180° に達しないことを実験して見よ．（図 10 参照）

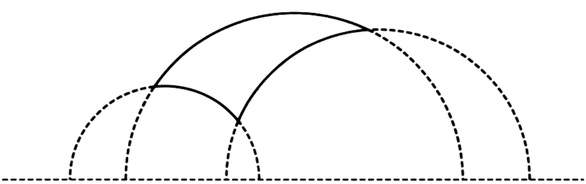


図 10 三角形の内角の和が < 180° であることを確かめよ．

さて，この上半平面宇宙で，「力の働いていない物体の運動」がいかなるものになるかを考えてみよう．そのためには速度ベクトル，加速度ベクトル

などをこの宇宙でどのように考えるのかをきめなくてはいけない．

2° では位置が $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ で与えられており，速度ベクトルは，

$$\text{(13)} \qquad \boldsymbol{v}(t)=\sum_{i=1}^{2}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}(u_1(t),\ u_2(t))$$

で与えられていた．$\boldsymbol{r}(u_1(t),\ u_2(t))$ は  にとっては意味のないもので，$\partial\boldsymbol{r}/\partial u_1$，$\partial\boldsymbol{r}/\partial u_2$ も同様であるが，$\dfrac{du_1}{dt}$，$\dfrac{du_2}{dt}$ の方は  にとっても意味があり，$\boldsymbol{v}(t)$ そのものはわからなくても，その長さの方は，

$$\text{(14)} \qquad \boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}(u_1(t),\ u_2(t))\frac{du_i(t)}{dt}\frac{du_j(t)}{dt}$$

と計算できた．したがって，  にとっても速度ベクトルなるものは理解可能な概念のはずだと考えて，どのように述べれば  にとって理解可能な述べ方になるかを考えよう．

(13) において，形式的に $\boldsymbol{r}$ を消して，

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial u_i}(u_1(t),\ u_2(t))$$

としたものは，ベクトル解析的には意味がないが，$(u_1,\ u_2)$ の関数に働く偏微分作用素としてならば意味がつく．つまり，

$$\text{(15)} \qquad \boldsymbol{v}(t)f=\sum_{i=1}^{2}\frac{du_i(t)}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1(t),\ u_2(t))$$

と考えることにすれば，これは  にとって理解可能であるし，必要な成分も，$f=u_j$ とおけばとり出すことができる．したがって，  に対しては次のように述べれば良い：

定義 D 内の１点Ｐから生えている **接ベクトル** V_{P} とは

$$V_{\mathrm{P}}f=\sum_{i=1}^{2}a_i\frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathrm{P}) \qquad (a_i\in\boldsymbol{R})$$

の形で与えられる偏微分作用素のことである．

このように述べてしまえば，D 上で無限小平行移動をどのように考えるべ

きかはっきりする. **4°** の (13) で, $\boldsymbol{r}$ を形式的に消して, $X = \sum_{i=1}^{2} X^i \partial/\partial u_i$ のとき,

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_{i,k=1}^{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} X^i \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{16}$$

等とすれば良いのである.

これを使うと, D 内に曲線 $(u_1(t), u_2(t))$ が与えられたとき, その速度ベクトル, 加速度ベクトルは,

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i}(u_1(t), u_2(t)) \\ \nabla_{\boldsymbol{v}(t)} \boldsymbol{v}(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\, k \end{matrix} \right\} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial u_i}(u_1(t), u_2(t)) \end{cases} \tag{17}$$

で与えられる. このようにして, 加速度 $\mathbf{0}$ (力が働いていない) の運動は, D 内においても「 等速直線運動をする 」と言うことができるようになったわけである.

6° 多 様 体

これまで,  にとっての「 宇宙 」が極めて自由に設定できることを見てきた. そこで, 今度はもっと自由な考え方をしてみよう.

後に様々な条件は付けるが, とりあえず, ハウスドルフ空間 M (位相空間の一種, 何のことかわからなくても気にする必要はない) を考え, これを「 宇宙 」と思うことにする*). 曲面の場合には, 結局パラメーター空間の方が重要になってきたことを思い出して, その役割を負ってくれるような数空間 $\boldsymbol{R}^m$ を M とは別に用意する. $\boldsymbol{R}^m$ のことを後には, M の**モデル空間** と呼ぶ

*)　こう考えるということは,「 宇宙 」を点集合と考えることを意味する.

ようになる．

定義 1　M が m 次元の C^0 **多様体** であるとは，M を覆う開集合の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ (i. e. $M=\bigcup_{\lambda\in I} V_\lambda$) で，各 V_λ が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U_λ と同位相となるものがとれる場合を言う．この同位相を与える写像を φ_λ: $V_\lambda\to U_\lambda$ と書き，$\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ を M の **局所座標系** と呼ぶ．$U_\lambda\subset\boldsymbol{R}^m$ なので，$q\in V_\lambda$ に対し，

$$\varphi_\lambda(q)=(x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q))$$

と書き，右辺を q の $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ に関する **局所座標** と呼ぶ．

$V_\lambda\cap V_\mu\neq\phi$ のとき，$U_{\lambda\mu}=\varphi_\lambda(V_\lambda\cap V_\mu)$，$U_{\mu\lambda}=\varphi_\mu(V_\lambda\cap V_\mu)$ とおき，$\varphi_\lambda\cdot\varphi_\mu^{-1}$: $U_{\mu\lambda}\to U_{\lambda\mu}$ なる写像を（局所）**座標変換** と呼ぶ．

定義 2　上の局所座標変換 $\varphi_\lambda\varphi_\mu^{-1}$ がすべて C^k 級の写像となるように，M を覆う開集合の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ が与えられたとき，これらの局所座標系まで込みにして，M を C^k **多様体** と呼ぶ．（$k=0, 1, 2, \cdots, \infty$ である．）

上の定義で注意すべき点は，「C^k 多様体 M」と述べたときには，常に M を覆う開集合の族（これを M の **開被覆** と言う）$\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ と，各 $\lambda\in I$ についての局所座標系 $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ まで一緒に考えられているということである． はこの M の中に住んでいると考えるのだが，しかし，これだけでは M 内の曲線に対して接ベクトルとか長さを考えることができないのでもう少し定義を続けなければならない．

定義 3　M を C^k 多様体とする．M 上の $\boldsymbol{R}$ 値関数 f が $\boldsymbol{C^k}$ **級関数** であるとは，f を各局所座標系で表示したもの，$f\cdot\varphi_\lambda^{-1}$: $U_\lambda\to\boldsymbol{R}$ が C^k 級関数となる場合を言う．

位相空間 M 上の関数の微分可能性などは，その関数を局所座標系で表示して初めて言えることだが，別の局所座標系で表示したとき微分可能性が変

るのでは困る．この意味で，C^k 級多様体 M 上では $l \leqq k$ なる l に対して C^l 級関数というのは局所座標系のとり方によらない意味があるが，C^{k+1} 級関数なる概念には意味がない．

M を C^k 多様体としたとき，M 上の C^k 級関数の全体を，$C^k(M)$ と書く．次のことが簡単にわかる：

（1） $f, g \in C^k(M)$，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ のとき，

$$(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda f(p) + \mu g(p) ,$$

$$f \cdot g(p) = f(p) g(p)$$

と定義すれば，$\lambda f + \mu g$，$f \cdot g \in C^k(M)$．

（2） $f \in C^k(M)$ が M のすべての点で $f(p) \neq 0$ ならば，

$$f^{-1} \in C^k(M).$$

これらのことより，$C^k(M)$ は実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の **可換代数***) となることも容易にわかる．

 の立場になって見れば，上のような概念だけではまだ不十分で，M 上の曲線とか，その長さなどが定義される必要がある．以下で，それを考えるが，その場合には，M は C^k 多様体で，$k \geqq 1$ であるとする．

定義4　M を m 次元 C^k 多様体とする．$\boldsymbol{R}^l$ の開集合 V から M への写像 $\psi: V \to M$ が **C^k 級写像** であるとは，ψ を各局所座標系で表示したもの，$\varphi_\lambda \cdot \psi: V \to \boldsymbol{R}^m$ が C^k 級写像となる場合を言う．特に，$l = 1$ のときの ψ を M 上の **曲線** と呼ぶ．写像そのものを曲線と呼んでいるのであって，ψ の像を曲線と呼んでいるのではないので注意してほしい．

さて，M の1点 p における接ベクトルを定義しよう．そのためにまず次のことに注意しよう．$\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ を M の局所座標系とすると，任意の $f \in$

---

*） これの定義については数学辞典（岩波）を参照されたい．

$C^k(M)$ に対し，$f\cdot\varphi_\lambda^{-1}$ は定義により U_λ 上の C^k 級関数となる．これを $\varphi_\lambda^{-1*}f$ と書き，φ_λ^{-1*} を $C^k(M)$ から $C^k(U_\lambda)$（U_λ 上の C^k 級関数全体）への写像と考える．逆に，$C^k(U_\lambda)$ の元 F に対して，$F\cdot\varphi_\lambda$ は，M の開集合 V_λ 上で定義された C^k 級関数と考えることができる．なぜなら，これを別の局所座標系を使って表示してもやはり C^k 級の関数になるからである．$F\cdot\varphi_\lambda$ を $\phi_\lambda{}^*F$ と書き，φ_λ^* を $C^k(U_\lambda)$ から $C^k(V_\lambda)$（V_λ 上で定義された C^k 級関数全体）への写像と考える．

定義 5　線形写像 X_p: $C^k(M)\to\boldsymbol{R}$ が M の点 p における **接ベクトル** であるとは，p を含む任意の局所座標系 $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ に対し，$X_p\cdot\varphi_\lambda^*$: $C^k(U_\lambda)\to\boldsymbol{R}$ が微分作用素，

$$X_p\cdot\varphi_\lambda^*F=\sum_{i=1}^m X^i\frac{\partial F}{\partial x^i}(\varphi_\lambda(p))\qquad X^i\in\boldsymbol{R},\ F\in C^\infty(U_\lambda)$$

の形に書ける場合を言う．

$X_p\cdot\varphi_\lambda^*$ は X_p の局所座標系による表示と考えられるから上の式は，φ_λ^* を省略して，

$$X_p=\sum_{i=1}^m X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\qquad（|_p は「p に対応する点での値をとる」の意味）$$

と書かれることが多い．この場合 $(x^1, \cdots, x^m)$ は使われている局所座標系の座標を表示する関数であることが暗に仮定されている．$(X^1, \cdots, X^m)$ を X_p の局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ に関する **成分** と呼ぶ．接ベクトルの書き方は情況に応じて，適当に省略して書くのが普通であるので，読者は注意を要する．

X_p を別の局所座標系 $\{V_\mu, \varphi_\mu, U_\mu\}$ で表示すれば，

$$X_p\cdot\varphi_\mu^*G=\sum_{j=1}^m \bar{X}^i\frac{\partial G}{\partial y^i}(\varphi_\mu(p))\quad\left(=\sum_{j=1}^m \bar{X}^i\frac{\partial G}{\partial y^i}\Big|_p\ と書いても良い\right)$$

と書ける．$(y^1, \cdots, y^m)$ は $\{V_\mu, \varphi_\mu, U_\mu\}$ による局所座標系であるが，$q\in V_\mu$ に対して，

$$\varphi_\mu(q) = (y^1(q), \cdots, y^m(q))$$

であり，同様に $q \in V_\lambda$ に対して

$$\varphi_\lambda(q) = (x^1(q), \cdots, x^m(q))$$

であり，したがって，$q \in V_\lambda \cap V_\mu$ の場合には，

$$(y^1(q), \cdots, y^m(q)) = \varphi_\mu(q) = \varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1}(x^1(q), \cdots, x^m(q))$$

であることに注意する．$\varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1}$ は C^k 多様体の定義より，C^k 級写像であるから，$\Phi_{\mu\lambda} = \varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1}$ と書き，成分表示して，

$$\Phi_{\mu\lambda} = (\Phi_{\mu\lambda}^1, \Phi_{\mu\lambda}^2, \cdots, \Phi_{\mu\lambda}^m)$$

とすれば，$y^i(q) = \Phi_{\mu\lambda}^i(x^1(q), \cdots, x^m(q))$ であり，各 $\Phi_{\mu\lambda}^i$ は $x^1, \cdots, x^m$ の C^k 級関数となる．また上の式は $q \in V_\lambda \cap V_\mu$ を省略して，

$$y^i = \Phi_{\mu\lambda}^i(x^1, x^2, \cdots, x^m) \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

のように書かれるのが普通であるし，記号の節約のために

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \cdots, x^m) \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

のようにも書く．最後の式は，要するに「変数 y^i は $x^1, \cdots, x^m$ の関数として書かれている」という意味だけを強調するために用いられる．

偏微分の規則を用いると，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x^i}(x^1(p), \cdots, x^m(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

であることに注意すると，

$$X_p = \sum_{i=1}^m X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \sum_{j=1}^m \bar{X}^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

を得る*)．したがって，X_p の $(x^1, \cdots, x^m)$ に関する成分 $(X^1, \cdots, X^m)$ と，$(y^1, \cdots, y^m)$ に関する成分 $(\bar{X}^1, \cdots, \bar{X}^m)$ との間には，

$$\sum_{i=1}^m X^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p = \bar{X}^j \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

なる関係のあることがわかる．

---

*)　論理的には少々飛びがあるので御用心！自分で納得のいくように再構成すること．

点 $p \in M$ における2つの接ベクトル X_p, Y_p を局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ *) に関して成分表示して

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \qquad Y_p = \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

と書く．任意の $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$aX_p + bY_p = \sum_{i=1}^{m} (aX^i + bY^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

と定義すれば，これも p における接ベクトルとなる．点 p における接ベクトルの全体は実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になっているわけである．これを，点 $p \in M$ における**接ベクトル空間**と呼び，T_pM と書く．

補題 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}\bigg|_p$ は，T_pM の1つの基底である．

証明 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}\bigg|_p$ が T_pM を張っているのは明らかだから，1次独立性を示せば良い．$\sum_{i=1}^{m} X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = 0$ とする．右辺の0は無論 $C^k(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への微分作用素としてのゼロの意味である．局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ を使って，点 p の近くでは x^j で表わされるような M 上の C^k 級関数 f_j を考えれば**)，

$$\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f_j|_p = \sum_{i=1}^{m} X^i \delta_{ij} = X^j = 0(f_j) = 0$$

だから，各 $X^j = 0$ を得る． □

V を $\boldsymbol{R}$ 内の0を含む開区間，$c\colon V \to M$ を M 上の C^k 級曲線とする．これは，局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ で表示すれば

$$c(t) = (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^m(t))$$

と書いても良い．$f \in C^k(M)$ を局所座標系で表示したものを，（記号が面倒だから）同じ記号で，

---

*) 局所座標系 $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ を考えているのだが，座標を表わす関数のみに注目している場合このように書く．

**) このような f_j の存在は自明のことではないが，直観的にはわかるであろう．

$$f = f(x^1, \cdots, x^m)$$

と表示すれば，合成写像 $f \cdot c : V \to \boldsymbol{R}$ は

$$f \cdot c(t) = f(x^1(t), \cdots, x^m(t))$$

と書くことができ，$t=0$ での微分を計算してみれば，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \cdot c = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx^i}{dt}(0) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

となる．ただし，p は局所座標系で $(x^1(0), \cdots, x^m(0))$ と表わされる M の点である．f は任意にとって考えて良いから，上のことより，曲線 c の $t=0$ における **接線** とは，p における接ベクトル

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dx^i}{dt}(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

のことであるとして良い．$\left(\text{したがって，これを } \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} \text{ と書くこともある．}\right)$

7° リーマン多様体

m 次元多様体 M を 大 にとっての宇宙と考えたのであるが，これまでの話ではまだ「曲線の長さ」が定義されていない．この節でそれを定義し，オイラーの意味での直線について考察しよう．

まず，M 内に住みついている 大 はどのようにして曲線の長さを知るのであろうか？　素朴な積分論に従えば，曲線の長さとは，「線素 ds」と呼ばれる無限小の物指があって，それの積分

$$\int_c ds$$

（素朴なイメージでは，積分も一種の総和にすぎないから，線素をいくつ，つなぎ合わせたかで長さは求まる．）

として与えられるものである．したがって，この ds を明確に表現できれば長さがわかることになる．

2° における曲線の長さの計算では，線素 ds として，

$$ds = \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

が使われていた．この形を見ると，両辺を 2 乗して

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} (dt)^2$$

と，ds でなく $(ds)^2$ の方を書いた方がきれいに書けることがわかる．また，パラメーター t は曲線が同じでもとり方がいろいろあるから，こういう曲線の表示方法に依存するものを消して，$(ds)^2$ そのものを表示しようとすれば

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u^1, u^2)\, du_i du_j$$

となる．$g_{ij}(u^1, u^2)$ は  にとって理解できるものであったから，M 上では，g_{ij} を与えることによって線素を定義することにしよう．

まず，局所座標系の族 $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ を，$\bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda = M$ となるように与えておこう．$U_\lambda \subset \boldsymbol{R}^m$ であるので，$q \in V_\lambda$ に対して，q の局所座標は

$$\varphi_\lambda(q) = (x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q))$$

であるが，φ_λ を消して，

$$q = (x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q))$$

とも書く．この意味で，$(x_1^\lambda, \cdots, x_m^\lambda)$ だけを書いて，M の局所座標系 $\{V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda\}$ のことだと考える場合もある．

上のような各局所座標系ごとに，m^2 個の C^k 級関数

$$g_{ij}^\lambda(x_1^\lambda, \cdots, x_m^\lambda), \qquad 1 \leqq i,\ j \leqq m$$

が，$g_{ij}^\lambda = g_{ji}^\lambda$ となるように与えられているとしよう．これを **線素** と考えるのだから，当然

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x_1^\lambda, \cdots, x_m^\lambda)\, dx_i^\lambda dx_j^\lambda$$

と考え，曲線の長さを

$$\int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^m g_{ij}^\lambda(x_1^\lambda(t), \cdots, x_m^\lambda(t)) \frac{dx_i^\lambda(t)}{dt} \frac{dx_j^\lambda(t)}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

としたいのであるが，そのためには，

（i）　対称行列 $(g_{ij}^\lambda)_{1\leq i,j\leq m}$ は U_λ の各点で正定値行列，

（ii）　同じ曲線を別の局所座標系 $(x_1^\mu, \cdots, x_m^\mu)$ で表示して，そこでの (g_{ij}^μ) を使って長さを計算しても，(g_{ij}^λ) を使った場合と同じ数値が得られる．

ということがなければならない．なぜなら（i）は「長さ」なるものが ≥ 0 の実数として求まるために必要であり，（ii）は，「長さ」なるものが使用した局所座標系毎に変ってしまっては困るからである．（ii）が成立するためには，

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}^\lambda(x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q))\, dx_i^\lambda dx_\mu^\lambda$$
$$= \sum_{k,l=1}^m g_{kl}^\mu(x_1^\mu(q), \cdots, x_m^\mu(q))\, dx_k^\mu dx_l^\mu$$

が成立しておれば十分だが，これは，(g_{ij}^λ) と (g_{kl}^μ) とが

（＊）　$$g_{kl}^\mu(x_1^\mu(q), \cdots, x_m^\mu(q)) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}^\lambda(x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q)) \left.\frac{\partial x_i^\lambda}{\partial x_k^\mu}\right|_q \left.\frac{\partial x_j^\lambda}{\partial x_l^\mu}\right|_q$$

という関係で結ばれていれば良い．

(g_{ij}^λ) 等を対称行列と見て，行列で書けば，

$$\left(g_{kl}^\mu(q) \right) = {}^t\left(\left.\frac{\partial x_i^\mu}{\partial x_k^\lambda}\right|_q \right) \left(g_{ij}^\lambda(q) \right) \left(\left.\frac{\partial x_j^\mu}{\partial x_l^\lambda}\right|_q \right)$$

の形で書けるから，$(g_{kl}^\mu(q))$ が正定値なら $(g_{ij}^\lambda(q))$ もそうである．一方

$$(x_1^\mu(q), \cdots, x_m^\mu(q)) = \varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}(x_1^\lambda(q), \cdots, x_m^\lambda(q))$$

であり，$(\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda \cdot \varphi_\mu^{-1})(x_1^\mu, \cdots, x_m^\mu) = (x_1^\mu, \cdots, x_m^\mu)$ だから，これを微分して，

$$\sum_{l=1}^m \left.\frac{\partial x_i^\mu}{\partial x_l^\lambda}\right|_q \left.\frac{\partial x_l^\lambda}{\partial x_j^\mu}\right|_q = \delta_j^i$$

を得る．つまり，行列$\left(\dfrac{\partial x_l^\mu}{\partial x_i^\lambda}\right)$の逆行列は$\left(\dfrac{\partial x_j^\lambda}{\partial x_k^\mu}\right)$で求められるから，これを使って，$(g_{ij}^\lambda(q))$が正定値なら$(g_{kl}^\mu(q))$もそうであることがわかる．

定義1 m 次元 C^k 多様体 M $(k \geqq 1)$の各局所座標系で，m^2 個の C^{k-1} 級関数 $g_{ij}^\lambda(x_1^\lambda, \cdots, x_m^\lambda)$ が，

(1) $g_{ij}^\lambda = g_{ji}^\lambda$,

(2) (g_{ij}^λ)は各点で正定値,

(3) (g_{ij}^λ)と(g_{kl}^μ)との間には関係式(＊)が成立

するように与えられたとき，つまり，M 上で線素 ds が矛盾なく与えられたとき，M と$(ds)^2$の組$(M, (ds)^2)$のことを **リーマン多様体** と呼ぶ．

リーマン多様体$(M, (ds)^2)$上では曲線の長さを測ることができるから，M 上の 2 点 p, q を結ぶ最短コースを問題にすることができる．特に，最短コースが存在するものとして，これがみたす微分方程式は **3°** の計算で総和 $\sum_{i=1}^{2}$ を $\sum_{i=1}^{m}$ などと変えるだけで全く同様に求められる．結果は，

$$\frac{d^2 x_l(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{m} \left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\} \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{dx_j(t)}{dt} = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

である．ただし，パラメーター t は等速のパラメーター

$$\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \text{一定}$$

であり，

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ i\,j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{m} g^{la} \left\{ \frac{\partial g_{ia}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_a} \right\}$$

である．g^{la} は(g_{ij})の逆行列の成分である．

上の方程式が，  の住むリーマン多様体$(M, (ds)^2)$で「ぴんと張った糸」がみたすべき式であるが，これまでの考察からこれを$(M, (ds)^2)$で「力の働いていない物体の運動」と考えても良いであろう．そうすれば，力

の働いている場合の運動方程式は，点 q に働く力 $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{m}F^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\bigg|_{q}$$

と表示し，$q(t)=(x_1(q),\cdots,x_m(q))$ として

$$\sum_{l=1}^{m}\left\{\frac{d^2x_l}{dt^2}+\sum_{i,j}\left\{\begin{matrix}l\\ i\,j\end{matrix}\right\}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right\}\frac{\partial}{\partial x_l}\bigg|_{q(t)}=\sum_{l=1}^{m}F^{i}\frac{\partial}{\partial x_l}\bigg|_{q(t)}$$

と書いて良いであろう．ただし物体の質量は1としている．

これで， にとっての宇宙は数空間 $\boldsymbol{R}^3$ から完全に解放され，自由な一般のリーマン多様体まで広がったことになるのだが，最後に，ほとんどすべての多様体 M に適当に線素 ds を設定して，リーマン多様体 $(M,(ds)^2)$ とできることを注意しておこう．

まず，M の閉集合の族 $\{K_\mu\}_{\mu\in I}$ が，$\bigcup_{\mu\in I}K_\mu=M$ となるとき，M の **閉被覆** と呼ぶ．

定義2　M の閉被覆 $\{K_\mu\}_{\mu\in I}$ が **局所有限被覆** であるとは任意の $p\in M$ に対して p を含む K_μ が有限個しか存在しない場合を言う．

さて，$f\in C^k(M)$ に対し，f の **台** ($\mathrm{supp}\,f$) とは，

$$\{q\in M;\ f(q)\neq 0\}$$

なる開集合の閉包のことを言う．

次のことが知られている：

補題1　M を位相空間としてパラコンパクトな m 次元 C^k 多様体とし，その局所座標系の全体を $\{V_\lambda,\varphi_\lambda,U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ とする．$M=\bigcup_{\lambda\in I}V_\lambda$ である．このとき，$C^k(M)$ の部分集合 $\{\psi_\mu\}_{\mu\in J}$ で次の性質をみたすものが存在する：

(a)　$\psi_\mu\geqq 0$ で，各 $\mu\in J$ に対し，$\mathrm{supp}\,\psi_\mu\subset V_\lambda$ となるような $\lambda\in I$ がある．

（b） $\{\mathrm{supp}\,\psi_\mu\}_{\mu\in J}$ は M の局所有限閉被覆.

（c） 任意の $q\in M$ に対し， $\sum_{\mu\in J}\psi_\mu(q)=1$

上の $\{\psi_\mu\}_{\mu\in J}$ を **開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ に従属する1の分解** と呼ぶ．証明は案外面倒なものであるから，各自，図をたくさん描いてみて感じをつかむことが大切である．

次の補題は線形代数の簡単な演習問題である：

補題2 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ を有限個の対称な正定値行列とすると，任意の $\lambda_1\geqq 0, \cdots, \lambda_k\geqq 0$ に対して，$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$ も対称な正定値行列である．

これらの補題を用いて次の定理が証明される：

定理 位相空間としてパラコンパクトな任意の C^k 多様体 M 上に，線素 ds が設定できる．（$(ds)^2$ のことを リーマン計量 と呼ぶ.）

証明 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ に従属する1の分解を $\{\psi_\mu\}_{\mu\in J}$ とする．各 $\mu\in J$ に対し，$\mathrm{supp}\,\psi_\mu\subset V_\lambda$ となる $\lambda\in I$ を1つ選んで $\lambda(\mu)$ とする．各 $\mu\in J$ に対して，局所座標系

$$(x_1^{\lambda(\mu)}, \cdots, x_m^{\lambda(\mu)})$$

を考え，$V_{\lambda(\mu)}$ での線素を，この座標系を用いて

$$(ds)^2_{\lambda(\mu)}=\sum_{i\in j}\delta_{ij}\,dx_i^{\lambda(\mu)}dx_j^{\lambda(\mu)}$$

とする．

$$(ds)^2=\sum_{\mu\in J}\psi_\mu(ds)^2_{\lambda(\mu)}$$

とすれば，前補題によりこれが線素を定義することがわかる． □

第2章　一般力学系

第1章で,「宇宙」を様々に設定して，そこで「力の働いていない物体の運動」なるものを考察したが,数学的に明快に述べられるのは「力の働いていない」運動だけであって,力が働いている場合には,どうしても,「力」とか「質量」という数学的には無定義の物理的概念が入ってくることを見た.では一体「力」とは何であろうか？

実は,「力」という概念は物理的に見ても極めてあいまいなものを含んでいるので，古典物理学はまず変分原理をより基本的な原理と考え,「力」という概念を理論の中から消し去る方向へと進んだのである．これは，現象論的な力の概念の奥に,もっと基本的な「エネルギー」という概念があることを，すべての物理学者が認めたからでもあるが，その他に，古典物理学の中には,「自然は決して無駄をしない」(馬鹿なことをやるのは人間の方だ)という感覚が存在していたことも確かである*).

1° 接バンドル，余接バンドル

測地線の方程式は2階の連立微分方程式であるから，まず，これを通常の微分方程式論が使えるような1階の方程式と思えるように変数の数を増して

*) 私自身は,「自然は大いに無駄をしているのだが，当の人間が自然を神格化してそのように思いたがっているのだ」と思っている.

考えよう．

M を m 次元 C^k 多様体で $k \geqq 1$ なるものとしよう．$p \in M$ における M の接ベクトル全体の集合を T_pM とする．M は $\boldsymbol{R}^n$ の中の“曲面”として考えていたりするのではないから $p \neq q$ ならば T_pM と T_qM は全く別の集合であると考える．つまり，$T_pM \cap T_qM = \phi$ と考える．直観的には T_pM は p を着力点とする力のベクトル全体の集合である．着力点の違う力は全く別物であって，1つの力が違う2点を着力点として持つことはない．

集合 TM を $\cup\{T_pM ; p \in M\}$ で定義し，これを M の **接バンドル** と呼ぶ．直観的には，TM は M 上で考えられる力のベクトル全体の集合である．TM の元 X に対し，その始点（着力点）を $\pi(X)$ と書く．π は TM から M の上への写像と考えられるが，これを接バンドル TM の **射影** と呼ぶ．この事情を考えて，TM の元を $(p ; v)$ と書くと便利である*)．$\pi(p ; v) = x$，$v \in T_pM$ である．

さて，こんどは余接バンドルなるものを定義しよう．

M の1点 p を任意にとって固定し，$\mathscr{I}_p$ を点 p で0となる M 上の C^k 関数全体とする．p を原点とする局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ を用いれば，$f \in \mathscr{I}_p$ は，定数項が0となり

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + (\text{2 次以上の項})$$

という形にテイラー展開される．（しかし，$k=1$ の場合は，2次以上と言うのはおかしい．正確には剰余項と呼ばなければならない．）我々が注目するのはこの1次の項である．$f \in \mathscr{I}_p$ に対し，その1次の項を，

$$(df)_p = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i)_p, \qquad a_i \in \boldsymbol{R},$$

と書こう．これはしばしば，**コベクトル** と呼ばれる．任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n \in$

---

*）$(p ; v)$ においては，v を固定して p を動かすというのは意味をなさないので要注意．直積とはここが違う．

$\boldsymbol{R}$ に対し，局所座標系上で，

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

という関数を考えれば，$(df)_p = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i)_p$ は明らかで，これより，点 p を始点とするコベクトルの全体 $T_p{}^*M$ は $(dx_1)_p, \cdots, (dx_n)_p$ を基底とする n 次元のベクトル空間となることがわかる．$T_p{}^*M$ と，T_pM とは深い関係があり，コベクトル $\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i)_p$，接ベクトル $X_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial/\partial x_i|_p$ に対し，

$$\langle \omega_p, X_p \rangle_p = X_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

という積が自然に定義される．$\langle\ ,\rangle_p$ は，$T_p{}^*M \times T_pM$ から $\boldsymbol{R}$ への双線形写像であり，

$$\langle (dx_i)_p, \partial/\partial x_j|_p \rangle_p = \delta_{ij}$$

が成立する．これを用いて，T_pM から $\boldsymbol{R}$ への任意の線形写像 $\tilde{\omega}$ に対して，$\omega = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}(\partial/\partial x_i|_p)(dx_i)_p$ とおけば，

$$\langle \omega, X_p \rangle_p = \tilde{\omega}(X_p)$$

が任意の $X_p \in T_pM$ について成立する．$T_p{}^*M$ は T_pM の**相対空間**とも呼ばれる．接バンドルの場合と同様に，$p \neq q$ のときには $T_p{}^*M \cap T_q{}^*M = \phi$ と考えて，和集合

$$T^*M = \cup \{ T_p{}^*M\ ;\ p \in M \}$$

を，**余接バンドル**と呼ぶ．これは，M の点から生えているコベクトル全体の集合のことであり，TM の場合と同様に，始点を対応させる写像 $\tilde{\pi}: T^*M \to M$ が自然に定義される．これを，余接バンドル T^*M の**射影**と呼ぶ．T^*M の元も TM のときと同様に，$(p\ ;\ \omega)$ と書くと便利である．

実は，M が C^k 級多様体ならば，TM も T^*M も C^{k-1} 級多様体となるので，こんどはそれを説明しよう．

仮定により M は C^k 級多様体だったから，局所座標変換 $\varphi_\lambda\varphi_\mu^{-1}$ がすべて C^k 級の写像となるように，M を覆う開集合の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ が与えられている．$\{V_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ をその局所座標系の族とする．

$\pi^{-1}(V_\lambda)$ を射影 π： $TM \to M$ による V_λ の逆像，つまり V_λ の点から生えている接ベクトルの全体とする．$\pi^{-1}(V_\lambda)$ の任意の元 $(p\,;X)$ は，$p\ (\in M)$ の局所座標を $(x^1, \cdots, x^m)$ とすれば

$$\left(x^1, \cdots, x^m\,;\ \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)$$

と表わすことができるから，$(x^1, \cdots, x^m, X^1, \cdots, X^m)$ なる $2m$ 個の実数の組を X の局所座標と考えることにする．

$$T\varphi_\lambda:\quad \pi^{-1}(V_\lambda) \to U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m$$

を上のようにして定義される写像としよう．$T\varphi_\lambda$ が $\pi^{-1}(V_\lambda)$ から $U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m$ の上への 1 対 1 の写像になっていることは明白であろう．こうなっているから $\{\pi^{-1}(V_\lambda), T\varphi_\lambda, U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m\}$ を局所座標系と考えるのである．

全く同様に，$\pi^{-1}(V_\lambda)$ を射影 $\tilde{\pi}$： $T^*M \to M$ による V_λ の逆像とする．$\tilde{\pi}^{-1}(V_\lambda)$ の任意の元 $(p\,;\omega)$ は $p\ (\in M)$ の局所座標を $(x^1, \cdots, x^m)$ とすれば，

$$(x^1, \cdots, x^m\,;\ \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i)$$

と表わすことができるから，$(x^1, \cdots, x^m, \omega_1, \cdots, \omega_m)$ なる $2m$ 個の実数の組を ω の局所座標と考え，このようにして定義される写像を

$$T^*\varphi_\lambda:\quad \tilde{\pi}^{-1}(V_\lambda) \to U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m$$

と書く．これも $\tilde{\pi}^{-1}(V_\lambda)$ から $U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m$ の上への 1 対 1 写像となっている．

〈位相〉 TM も T^*M も，まだ単なる集合でしかないのでこれに次のようにして位相を入れる：（話は TM 上でするが，T^*M 上でも全く同じことである．） TM の部分集合 S が開集合であるとは，任意の $\lambda \in I$ に対して，

$$T\varphi_\lambda(S \cap \pi^{-1}(V_\lambda))$$

が $U_\lambda \times \boldsymbol{R}^m$ の開部分集合となる場合を言う．

このようにして定義された TM の開集合の全体を $\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ が開集合の公理を全部みたすことは明白であろう．これによって TM は位相空間となるのであるが，実は次のことも成立する．（証明は略す．）

補題　TM（及び T^*M）は上の位相でハウスドルフ空間である．さらに，M がパラコンパクトならば，TM（及び T^*M）もそうである．

上の補題によって，TM, T^*M は $2m$ 次元の C^0 級多様体となることがわかったから，今度は座標変換について考えよう．

〈座標変換〉　$V_\lambda \cap V_\mu \neq \phi$ とし，V_λ, V_μ 上の局所座標系をそれぞれ

$$(x^1, x^2, \cdots, x^m), \qquad (y^1, y^2, \cdots, y^m)$$

とする．

$V_\lambda \cap V_\mu$ の点より生えている接ベクトル $(p\,;X)$ の局所座標は，

$$T\varphi_\lambda(p\,;X) = (x^1, \cdots, x^m, X^1, \cdots, X^m),$$
$$T\varphi_\mu(p\,;X) = (y^1, \cdots, y^m, Y^1, \cdots, Y^m)$$

と 2 通りの表示を持つが，これらは

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p$$

という関係で結ばれているのだから，

$$Y^j = \sum_{k=1}^m X^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}(x^1, \cdots, x^m)$$

でなければならない．つまり，2 つの局所座標は，

$$\begin{cases} y^j = y^j(x^1, \cdots, x^m) \\ Y^j = \displaystyle\sum_{k=1}^m X^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}(x^1, \cdots, x^m) \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

という関係で結ばれている．これが $(x^1, \cdots, x^m, X^1, \cdots, X^m)$ と $(y^1, \cdots, y^m, Y^1, \cdots, Y^m)$ の座標変換の式である．第 1 式は座標 $(x^1, \cdots, x^m, X^1,$

…, X^m) の関数と見て C^k 級であるが，第2式は y^j が微分されているので C^{k-1} 級となってしまう．このことが $V_\lambda \cap V_\mu \neq \phi$ であるような任意の λ, μ について成立するので，TM は局所座標変換がすべて C^{k-1} 級の写像となるように，開集合の族 $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in I}$ で覆われたことになる．これより，TM は C^{k-1} 級の多様体となることがわかる．

全く同様に，今度は，$V_\lambda \cap V_\mu$ の点より生えているコベクトル $(p\,;\,\omega)$ を考えれば，$(p\,;\,\omega)$ の局所表示は

$$T^*\varphi_\lambda(p\,;\,\omega) = (x^1, \cdots, x^m, \omega_1, \cdots, \omega_m),$$
$$T^*\varphi_\mu(p\,;\,\omega) = (y^1, \cdots, y^m, \omega_1', \cdots, \omega_m')$$

と2通りの表示を持つが，これらは

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i (dx^i)_p = \sum_{j=1}^m \omega_j' (dy^j)_p$$

という関係で結ばれているのだから，

$$\omega_i = \sum_{k=1}^m \omega_k' \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x^1, \cdots, x^m)$$

でなければならない．この式は，立場を入れかえて，x^i が $y^1, \cdots, y^m$ の C^k 級関数としても書けることを使えば，

$$\omega_j' = \sum_{l=1}^m \omega_l \frac{\partial x^l}{\partial y^j}(y^1, \cdots, y^m)$$

とも書ける．右辺の $y^1, \cdots, y^m$ を $x^1, \cdots, x^m$ の関数と見れば，2つの局所座標は，

$$\begin{cases} y^j = y^j(x^1, \cdots, x^m) \\ \omega_j' = \displaystyle\sum_{l=1}^m \omega_l \frac{\partial x^l}{\partial y^j}(y^1(\boldsymbol{x}), \cdots, y^m(\boldsymbol{x})) \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

(ただし，$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^m)$) という関係で結ばれていることがわかる．第2式は，$y^1, \cdots, y^m$ について C^{k-1} 級の関数だが y^i 自身が $x^1, \cdots, x^m$ の C^k 級関数だから，その合成関数として $x^1, \cdots, x^m$ について C^{k-1} 級となり，したがって，座標

$$(x^1, \cdots, x^m, \omega_1, \cdots, \omega_m)$$

に関して C^{k-1} 級の写像となる．このことが $V_\lambda \cap V_\mu \neq \phi$ となるよう任意の λ, μ について成立するので T^*M は C^{k-1} 級の多様体となることがわかる．

TM と T^*M とは概念的には一応違ったものであるが，実は次のことが成立する：

定理　M がパラコンパクトならば TM と T^*M とは同じものと思える．

証明　前章 **7°** の定理により M には C^{k-1} 級のリーマン計量が設定できる．リーマン計量というのは，M 上に線素 ds を矛盾なく与えるものであるが，これを線形代数的に見れば，M の各接空間 T_pM に正定値な内積 $\langle\ ,\ \rangle_p$ を定義するものと考えて良い．つまり局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ を使って $X_p = \sum_{i=1}^m X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$，$Y_p = \sum_{j=1}^m Y^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ と2本の接ベクトルが与えられたとき，

$$\langle X_p, Y_p\rangle_p = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(p) X^i Y^j$$

によって内積を定義するのである．これが局所座標系のとり方によらずに同じ値となることは，リーマン計量 $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ の座標変換の規則より確かめられる．

さて，任意の $X_p \in T_pM$ に対して，T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $\langle X_p,\ \rangle_p$ を $Y_p \in T_pM$ に $\langle X_p, Y_p\rangle_p$ を対応させるものとして定義すると，$\langle X_p,\ \rangle_p$ は，T_pM の相対空間の元と考えることができる．T_p^*M は T_pM の相対空間であるから，$\langle X_p,\ \rangle_p \in T_p^*M$ と考えることができ，$X_p \mapsto \langle X_p,\ \rangle_p$ は自然に，T_pM から T_p^*M の上への線形写像となり，次元を考えればこれが線形同形写像であることがわかる．$p \in M$ は任意だから，この写像は TM から T^*M の上への1対1写像と考えることもできる．この写像は局所座標系を使って書けば，$(x^1, \cdots, x^m, X^1, \cdots, X^m)$ を

$$\left(x^1, \cdots, x^m, \sum_{j=1}^m g_{1j}(\boldsymbol{x}) X^j, \cdots, \sum_{j=1}^m g_{mj}(\boldsymbol{x}) X^j\right)$$

に写しているだけだから，C^{k-1} 級の写像であり，逆写像も同じく C^{k-1} 級となる．つまり，TM と T^*M とは上のような自然な写像で C^{k-1} 同相となる．　□

2° 測地線の方程式と常微分方程式論

一般力学系の理論の数学的基礎は多様体論と，常微分方程式論であるので，この節で測地線の方程式にからめて，常微分方程式論を簡単に復習しておこう．なお，この節で登場する多様体はすべて C^∞ 級*) であるとしておく．

$(M, (ds)^2)$ を（C^∞ 級の）リーマン多様体とし，$(ds)^2$ は局所座標系を使って

$$(ds)^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{x})\, dx^i\, dx^j \qquad (\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^m))$$

と書かれているものとしよう．測地線の方程式は，

$$\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{m} \left\{ {i \atop j\,k} \right\} (\boldsymbol{x}(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

で与えられていたので，これを 1 階の常微分方程式と思うために，次のように変形する：

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = v^i \\[2ex] \dfrac{dv^i}{dt} = -\displaystyle\sum_{j,k=1}^{m} \left\{ {i \atop j\,k} \right\} (\boldsymbol{x})\, v^j v^k \end{cases} \qquad (1 \leqq i \leqq m)^{**)}$$

$\sum v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ は速度ベクトルと思うことができるから，

$$(x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m)$$

は自然に，接バンドル TM の点（の局所座標）と思うことができる．そう見ると上の式は，TM 上の点 $p(t)$ の動きを表す微分方程式で

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^i(t) \\ v^i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^i(x^1(t), \cdots, x^m(t), v^1(t), \cdots, v^m(t)) \\ G^i(x^1(t), \cdots, x^m(t), v^1(t), \cdots, v^m(t)) \end{bmatrix}$$
$$(1 \leqq i \leqq m)$$

の形で与えられるものの一種であることがわかる．F^i, G^i は（$x^1, \cdots, x^m$,

---

*）任意の l に対して C^l 級のとき，C^∞ 級であると言う．

**）考え方としては，これと全く同じ式が第 II 部 3 章 1° にも登場する．

$v^1, \cdots, v^m$) の C^∞ 級関数である. 上式の左辺は多様体 TM 上の曲線 (の局所座標) の微分だから, TM の接ベクトルであり, その意味では

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{p(t)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{dv^j(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial v^j}\bigg|_{p(t)} \tag{3}$$

と書くべきものである. これに合わせて (1) 式の右辺を書くと

$$\sum_{i=1}^{m} v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{p(t)} - \sum_{i,j,k} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix} \right\} (\boldsymbol{x}(t))\, v^j(t)\, v^k(t) \frac{\partial}{\partial v^i}\bigg|_{p(t)} \tag{4}$$

と書ける. $p(t)$ の局所座標が ($x^1(t), \cdots, x^m(t), v^1(t), \cdots, v^m(t)$) であったことに注目してほしい.

(4) 式は t に依存するように書いてあるが良く見るとこの式は t がなくても TM 上の点 p (及びその局所座標 ($x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m$)) が与えられれば書けるということに注意してもらいたい. つまり,

$$\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{p} - \sum_{i,j,k} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix} \right\} (\boldsymbol{x})\, v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i}\bigg|_{p} \tag{5}$$

は t を考えないでも意味を持っているのである. このことは次のように抽象化して述べた方がわかり良い.

N を n 次元 C^∞ 級多様体とする. 測地線の方程式の場合には $N = TM$ とするのだが, そのことはしばらく忘れてよい. TN を N の接バンドルとし, π: $TN \to N$ を射影とする.

定義 1　N の各点 p に対して p から生えている接ベクトル $v(p)$ を対応させる対応 v のことを **接ベクトル場** と呼ぶ. v は N から TN への写像であり, $\pi v(p) = p$ をみたす. v: $N \to TN$ が C^k 級写像のとき, v を **C^k 級のベクトル場** と呼ぶ. 「 接 」の字は省略することが多い.

v を N 上の C^∞ 級 ($k \geqq 0$) のベクトル場とする. これは N の局所座標系 $(z^1, \cdots, z^n)$ を用いれば, $\boldsymbol{z} = (z^1, \cdots, z^n)$ として,

$$v(z)=\sum_{i=1}^{n} v^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

と書くことができる．$v^i(z)$ は $(z^1, \cdots, z^n)$ の C^∞ 級関数である．ベクトル場 v に対してその積分曲線なるものを次に定義する．

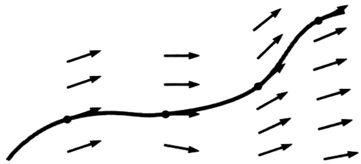


図 1　ベクトル場の積分曲線

定義 2　N 上の曲線 $p(t)$, $t_0<t<T$, が v の **積分曲線** であるとは，各 t, $t_0<t<T$, において，

$$\frac{d}{dt}p(t)=v(p(t)) \tag{6}$$

が成立する場合を言う．（図 1 参照）

ベクトル場というのは流体の流れに対して各点における流速ベクトルを考えているようなもので，積分曲線とは，その流れの中に花粉のようなものを浮べたときの花粉の軌跡のようなものであるというわけだが，大切なことは測地線の方程式のような 2 階の常微分方程式でも接バンドル上に直して考えると，結局ベクトル場の積分曲線を求める微分方程式と見なせるということである．

(6) 式は，$p(t)$ の局所座標を $(z^1(t), \cdots, z^n(t))$ とすれば，

$$\frac{d}{dt}z^i(t)=v^i(z^1(t), \cdots, z^n(t)) \qquad (1\leqq i\leqq n) \tag{7}$$

となり，1 階の常微分方程式である．

(6) または (7) は，積積分（product integral）と呼ばれる，通常の積分と思想的には同一の考え方で解くことができる．しかし，積積分は通常の積分とは違って便利な公式が 1 つもない積分法なので，わかることは「解が存在している」ということだけである．そこで，細部に立入ることをやめて，以下では良く知られていることを証明抜きで述べておこう．

定理1 N を C^∞ 級多様体，v を N 上の C^∞ 級の接ベクトル場とする．任意の点 $p \in N$ に対し，p の近傍 V_p，実数直線 $\boldsymbol{R}$ における 0 の近傍 I_0，及び $V_p \times I_0$ から N への C^∞ 級写像 φ が存在し，次をみたすようにできる：

（i） 任意の $x \in V_p$ で，$\varphi(x, 0) = x$.

（ii） 任意の $x \in V_p$，任意の $t \in I_0$ で，$\dfrac{d}{dt}\varphi(x, t) = v(\varphi(x, t))$.

上の定理は **常微分方程式論の基本定理** と呼ぶべき定理であって，ベクトル場 v に各点から積分曲線がちょっとは描き出せるということを教えている．では，$p \in N$ を固定し，$t = 0$ で p の所から出発する積分曲線はどこまで伸びるのであろうか？ これに対する解答は次の定理である：

定理2 情況は前定理のままとする．$p \in N$ に対して $c_p(t)$，$t \in [0, T)$，を $c_p(0) = p$，つまり，p を初期点とする v の積分曲線とする．このとき，T に収束する実数列 $\{t_k\}_{k \geqq 1}$ で，$\{c_p(t_k)\}_{k \geqq 1}$ が N の点に収束するものがあれば，積分曲線は T を越えて もう少し延長できる．

証明 $\{t_n\}_{n \geqq 1}$ で $\lim_{n\to\infty} t_n = T$ かつ，$\lim_{n\to\infty} c_p(t_n) = q \in N$ とする．定理1により，q の近傍 V_q，0 の近傍 I_0，及び C^k 級写像 φ：$V_q \times I_0 \to N$ で，$\varphi(x, 0) = x$，$\dfrac{d}{dt}\varphi(x, t) = v(\varphi(x, t))$ となるものがとれる．I_0 は 0 の近傍だから，ある数 $\varepsilon > 0$ があって，$I_0 \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$ として良い．$\{t_n\}_{n \geqq 1}$ の性質より，ある番号 n_0 があって，$n \geqq n_0$ ならば $T < t_n + \varepsilon$，$c_p(t_n) \in V_q$ となる．積分曲線をつぎ足したものはやはり積分曲線だから，このことは，$c_p(t)$ が T を越えて $t_n + \varepsilon$ まで延長できることを意味する． □

この定理はもし積分曲線 $c_p(t)$，$t \in [0, T)$ が T を超えて延長できないとすれば，T に収束するどんな点列 $\{t_k\}_{k \geqq 1}$ をとっても点列 $\{c_p(t_k)\}_{k \geqq 1}$ は収束しないことを意味する．これは，直観的には（図2）のようなことが起っていることを意味する．このような事情を考えて次の定義をする：

定義 3 N 上のベクトル場 v が **完備** であるとは，任意の $p \in N$ に対し，$c_p(0)=p$ となる v の積分曲線が $t \in (-\infty, \infty)$ の範囲で定義される場合を言う．

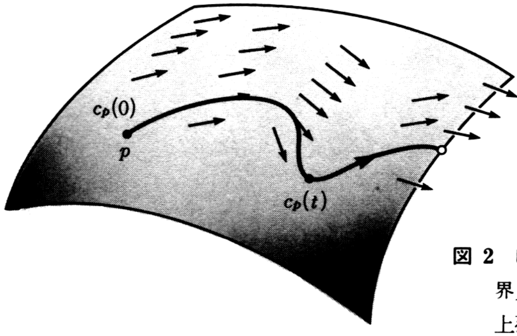


図 2 時間有限で $c_p(t)$ が N の「境界」に達してしまうと，これ以上延長できなくなる．

ベクトル場 v が完備のとき，$c_p(t)$ を $\Phi_v(t)(p)$ と書き，$\Phi_v(t)$ を N から N への写像とみると次のことが成立する：

定理 3 $\Phi_v(t)$ は N から N の上への C^∞ 級同相写像（$\Phi_v(t)$ に逆写像があり，$\Phi_v(t)$ も $\Phi_v(t)^{-1}$ も C^∞ 級写像）である．

積分曲線を具体的に求めることは v が簡単な形をしていないと難しいが，多くの場合，以下の 2 つの定理で何とかなってしまう*)．

定理 4 定理 1 と同じ情況下で，さらに $v(p) \neq 0$ とする．p の近傍で局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ を上手にとると，この座標系での v の表示が，

$$v(x) = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x$$

となるようにできる．

---

*) 無論，どうにもならない場合というのもたくさんある．

上の定理を考慮すると, $v(p)=0$ となる点の近くが難しいと察しがつくであろうが, これについてはポアンカレ・スタンバーグの **線形化定理** と呼ばれる次の定理がある：

定理 5（線形化定理） 定理 1 と同じ情況下で, さらに $v(p)=0$ とする. p を原点とする局所座標系で v が,

$$\sum_{i=1}^{n} v^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad v^i(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + \text{2 次以上}$$

と書けたとする. さらに, v の 1 次の項のみで作る行列 $(a^i_j)_{1\leqq i,j\leqq n}$ の固有値を重複を許して $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする. この固有値が, 次の条件 (P) をみたすならば, 適当な局所座標系 $(y^1, \cdots, y^n)$ をとって, v を

$$v(y^1, \cdots, y^n) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

と表すことができる. (P) は次のように述べられる：

(P) $\left\{\begin{array}{l}\text{任意の } i,\ 1\leqq i\leqq n,\ \text{及び任意の非負の整数 } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{ に対して, } \alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2 \text{ ならば,} \\ \qquad \lambda_i \neq \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n \end{array}\right.$

上のようにベクトル場が線形化されてしまえば, 積分曲線を求める微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

となるから, 解の方は,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$$

となる.

3° 変分法と Lagrange（ラグランジェ）系

一般力学系の数学的基礎は多様体の概念と，常微分方程式論であると前節で述べたのだが，これの精神的支柱または哲学的支柱というのは，この節で述べる変分原理である．これは，「自然は決して無駄をしないが故に，自然法則は必ず何かの変分問題の解として記述される」という考え方である．これは絶対者としての神を認める立場からは極めて受入れられやすい考え方ではあるが，私自身は，この原理は「人間性の原理」（人間が自然を理想化してそう思いたがっている）とでも呼ぶべきものにおきかえることを考えている．

まず，**配位空間**と称する C^∞ 級多様体 M を考える．我々が考えるのは M 内で起る運動（M の点の動き）である．

M の接バンドル TM を考え，TM 上の実数値 C^∞ 級関数 L を1つ選んで固定する．考えるのは「この L によって支配される運動」である．L がどのようにして M 内の運動を支配するのかをこれから述べていこう．

M の局所座標系の1つを $(x^1, \cdots, x^m)$ とし，これが定義されている開集合を V とすると，TM の局所座標系としては，$\pi^{-1}(V)$ 上で定義された $(x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m)$ をとることができる．$(v^1, \cdots, v^m)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の自然な座標系であり，点 $p \in V$ より生えている接ベクトルはこの局所座標系を使えば

$$X_p = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

と表示される．$(p\,;\,X_p) \in TM$ である．P, Q を M の2点とし，$\Omega_{\mathrm{P,Q}}$ を P と Q を結ぶ曲線全体のなす集合とする．つまり $c \in \Omega_{\mathrm{P,Q}}$ とは，c が $[0, 1]$ から M への C^∞ 級写像で $c(0) = \mathrm{P}$, $c(1) = \mathrm{Q}$ であることを意味する．大切なことは，この $\Omega_{\mathrm{P,Q}}$ をあたかも多様体であるかのように考えることである．

集合 $\Omega_{\mathrm{P,Q}}$ から実数直線 $\boldsymbol{R}$ への写像 J_L を，

$$J_L(c) = \int_0^1 L\left(c(t)\,;\ \frac{dc}{dt}(t) \right) dt$$

で定義し，これを $\Omega_{P,Q}$ 上の **汎関数** と呼ぶ.「L に支配される運動」と前に述べたことは，次の意味である：

定義1　Pを発し，Qに至る曲線 c が L に支配されているとは，c が汎関数 J_L の極値を与える曲線になっているということである. 関数 L を（その運動を支配する）**ラグランジェ（Lagrange）関数** と呼ぶ.（図3参照）

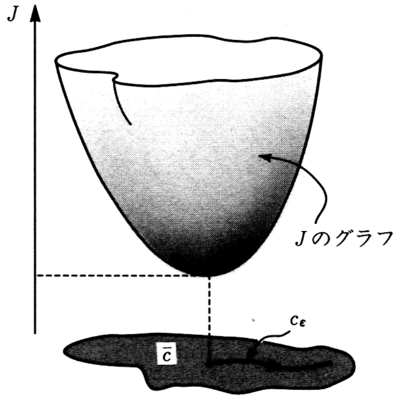


図 3　汎関数 J のグラフ

考え方としては測地線の場合と全く同じで，まず極値をとる $\bar{c}: I \to M$（$I = [0, 1]$）があったとして，これをパラメーター ε で動かしてみよう. つまり，任意の $\varepsilon \in (-a, a)$ に対して $\Omega_{P,Q}$ の元 $c_\varepsilon: I \to M$ を考えるのだが，話を簡単にするために，以下では，$c_0 = \bar{c}$，$c_\varepsilon \in \Omega_{P,Q}$ のほかに

（＊）　$\varphi(t, \varepsilon) = c_\varepsilon(t)$ とすると，φ は $I \times (-a, a)$ から M への C^∞ 級写像である.

という条件で考える.

$J_L(c_\varepsilon)$ は ε の関数と思えるのだが，$\varepsilon = 0$ の所で極値をとるのだから，微分と積分の順序を交換して，

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} J_L(c_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} L\left(c_\varepsilon(t)\,;\, \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dt = 0$$

となっていなくてはならない．積分記号の中を詳しく計算するには少し工夫が必要である．まず $\bar{c}$ は，一枚の局所座標系の中に納まっているとは限らないが，図4の V のような局所座標系をとって，c_ε を考えるときには図5のように V の外側では $\bar{c}$ と一致してしまうようなものだけを考えることにする．

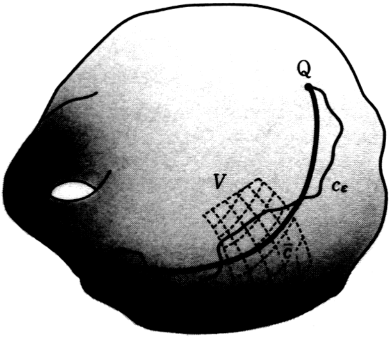


図 4　$\bar{c}$ が1つの座標系の中に納まっているとは限らない．

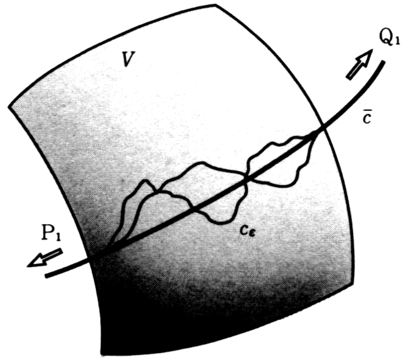


図 5　$\bar{c}$ をゆらすといっても1つの座標系内に納まるようにゆらす．

V で定義されている局所座標系を $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ とし，$\bar{c}(t)$, $c_\varepsilon(t)$ は $t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲では V に入り，そこでは

$$(\bar{x}^1(t), \cdots, \bar{x}^m(t)), \quad (x_\varepsilon^1(t), \cdots, x_\varepsilon^m(t)) \qquad (t \in [t_0, t_1])$$

と座標系で表示されているとする．$t \notin [t_0, t_1]$ なら $\bar{c}(t) = c_\varepsilon(t)$ だから，

$$0 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} L\left(c_\varepsilon(t)\,;\, \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} L\left(c_\varepsilon(t)\,;\, \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dt$$

であり，結局 V 上で考えれば良い．

局所座標系で L を表示して $L(x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m)$ とすれば，

$$\left(c_\varepsilon(t)\,;\, \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t) \right) = (x_\varepsilon^1(t), \cdots, x_\varepsilon^m(t), \dot{x}_\varepsilon^1(t), \cdots, \dot{x}_\varepsilon^m(t))$$

$\left(ただし\ \dot{x}_\varepsilon^i(t)=\dfrac{\partial x_\varepsilon^i}{\partial t}(t)\right)$だから，次の式が得られる．

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}L(\,x_\varepsilon^1(t),\,\cdots,\,x_\varepsilon^m(t),\,\dot{x}_\varepsilon^1(t),\,\cdots,\,\dot{x}_\varepsilon^m(t)\,)\,dt=0\,.$$

$$x_\varepsilon^i(t)=\bar{x}^i(t)+\varepsilon\eta^i(t)\,,\qquad \dot{x}_\varepsilon^i(t)=\dot{\bar{x}}^i(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t)$$

という特別な形で話をしてもこれまでのことは変らない．ただし，$\eta^i(t)$ $(1\leqq i\leqq m)$ は $\eta^i(t_0)=\eta^i(t_1)=0$ となるような $[t_0,\,t_1]$ 上の C^∞ 級関数である．この形で偏微分規則を使うと，前式は

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^m\{\,L_{x_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)\,\eta_i(t)+L_{v_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)\,\dot{\eta}_i(t)\,\}\,dt=0\,.$$

これに部分積分を行い $\eta_i(t_0)=\eta_i(t_1)=0$ を使うと，

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^m\left(L_{x_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)-\frac{d}{dt}L_{v_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)\right)\eta_i(t)\,dt=0$$

を得る．ただし，$L_{x_i}=\dfrac{\partial L}{\partial x_i}$，$L_{v_i}=\dfrac{\partial L}{\partial v_i}$ である．η_i は両端で 0 となる以外は任意だから，上の式が成立するためには

$$(1)\quad L_{x_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)-\frac{d}{dt}L_{v_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)=0\ ^{*)}\qquad(1\leqq i\leqq n)$$

でなければならない（**変分学の基本補題**）．これは $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ がみたすべき微分方程式であるが，もう少しそれらしく書くと，

$$L_{x_i}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)-\sum_{j=1}^m L_{v_ix_j}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)\,\dot{\bar{x}}_j(t)$$
$$-\sum_{j=1}^m L_{v_iv_j}(\,\bar{\boldsymbol{x}}(t),\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\,)\,\ddot{\bar{x}}_j(t)=0$$

となる．これは次のようにも略記される：

$$(2)\quad \sum_{j=1}^m L_{v_iv_j}\frac{d^2\bar{x}_j(t)}{dt^2}+\sum_{j=1}^m L_{v_ix_j}\frac{d\bar{x}_j(t)}{dt}-L_{x_i}=0\qquad(1\leqq i\leqq n).$$

Ｐを発しＱに至る，L で支配される運動というものは，少くとも上の微分方程式をみたしていなければならないわけである．ところがこの微分方程式

*）　この式を **オイラー（Euler）の方程式** と呼ぶ．

は前節で述べたような形をしていない．そこで次のような正則の場合に話を限ることにする：

定義 2 ラグランジェ関数 L が **正則** であるとは，$L(p\,;\,v)$ を $p\in M$ を任意に固定して，線形空間 T_pM 上の関数とみたとき，行列 $(L_{v^iv^j})_{1\leqq i,j\leqq m}$ の行列式が 0 とならないことである．ただし，$(v^1,\cdots,v^m)$ は T_pM の通常の座標（線形座標）で，$L_{v^iv^j}=\dfrac{\partial^2}{\partial v^i\partial v^j}L(p\,;\,v)$ である．

L が正則である場合には (2) の両辺に $(L_{v_iv_j})$ の逆行列 $(G_{ki})_{1\leqq k,i\leqq m}$ をかけて i で和をとると，

$$
(3)\qquad \frac{d^2\bar{x}_k(t)}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{m}G_{ki}L_{v_ix_j}\left(\bar{\boldsymbol{x}}(t),\ \frac{d\bar{\boldsymbol{x}}}{dt}(t)\right)\frac{d\bar{x}_j(t)}{dt}
-\sum_{i=1}^{m}G_{ki}L_{x_i}\left(\bar{\boldsymbol{x}}(t),\ \frac{d\bar{\boldsymbol{x}}}{dt}(t)\right)=0\qquad(1\leqq k\leqq m)
$$

となり，前節で説明した 1 階の常微分方程式に直せる形になる．これより，L が正則の場合には，(3) 式は L に支配される運動の必要条件でしかないにもかかわらず，様々なことを教えてくれる．以下それを列挙しよう．

（a） TM 上の任意の点 $(p\,;\,v)$（ただし，v は $p\in M$ から生えている接ベクトル）に対して，$t=0$ で $(p\,;\,v)$ を通過する (3) の解*) が $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ の範囲でただ 1 つ存在する．ただし，$\varepsilon\,(>0)$ は $(p\,;\,v)$ に依存する．$(p\,;\,v)$ をこの解の **初期点**（または，**初期値**）と呼ぶ．p の方を **初期値**，v を **初期微分** と言うこともある．

（b） (a) で存在するとわかった (3) の解*) を $\varphi((p\,;\,v),t)$ と書けば，φ は，{ $(p\,;\,v)$ の近傍 } $\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ から TM への C^∞ 級写像である．

（c） p, q を M 内の十分近い 2 点とすると，(3) の解 $\bar{c}(t)$ で $\bar{c}(0)=p$，$\bar{c}(t')=q$（つまり，q を通過する）となるものが存在する（1つとは限らな

---

*） 正確には (3) を 1 階の常微分方程式と思い直したものの解．

い). (このことは (a) と, 点 p の所での逆関数定理より簡単に得られる.)

(d) $(p\,;\,v)$ を初期点とする (3) の解*) で, t に関する定義域を $t>0$ の方向に目一杯広げたものを $(\bar{c}(t)\,;\,\dot{\bar{c}}(t))$, $t\in[0,\ T)$ とする. $T<\infty$ ならば, T に収束するどんな点列 $\{t_k\}_{k\geq 1}$ をとっても $\{(\bar{c}(t_k)\,;\,\dot{\bar{c}}(t_k))\}_{k\geq 1}$ が TM の点に収束することはない. このことは $t<0$ の方向についても同様である.

(d) において, $T<\infty$ がどういう場合に起るのかを考えてみれば, (d) の結論から,「それは $t\to T$ のときに $(\bar{c}(t),\ \dot{\bar{c}}(t))$ が TM の端の部分に来てしまう, つまり,「$\bar{c}(t)$ が M の端に来てしまうか, $\dot{\bar{c}}(t)$ の大きさが ∞ になってしまう場合」であることがわかる. いずれにしろ, こういうことが起る場合には, 起っている運動をどこまでも ($t=\infty$ まで) 追跡することはできないのだから, 考えている系 $(TM,\ L)$ は **開いている** と呼ばれる.

これとは逆に, TM の任意の点を初期点とする解が $t\in(-\infty,\ \infty)$ で定義されるとき, 系 $(TM,\ L)$ は閉じていると呼ぶ. このことは, 微分方程式 (3) を, 前節でやったように TM 上のベクトル場 $\mathscr{X}$ の積分曲線を求める式とみたとき, $\mathscr{X}$ が **完備** であると言うことと同じである.

上で述べた性質 (a) ～ (d) はいずれも前節の定理1～3を使って得られることで, (3) が変分問題から得られていることを何も使っていなかったので, 最後にこのことから得られることを述べよう. そのために, まず

補題 TM 上の関数 L に対し, 局所座標系 $(x^1,\ \cdots,\ x^m,\ v^1,\ \cdots,\ v^m)$ を使って $\sum_{i=1}^{m} v^i L_{v^i}$ を作れば, これは TM 上の関数となる.

証明 座標変換に対して, $(v^1,\ \cdots,\ v^m)$ はベクトルとして, $(L_{v^1},\ \cdots,\ L_{v^m})$ はコベ

---

*) 前注参照

クトルとして変換されることに注意すれば，$\sum_{i=1}^{m} v^i L_{v^i}$ は座標系のとり方によらず TM 上で意味を持つ．実際これは，TM 上の関数 $L(p\,;\,v)$ を点 $(p\,;\,v)$ において v 方向に方向微分したもの，つまり

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} L(p\,;\,v+\varepsilon v) = (DL)_{(p\,;\,v)}\,v$$

を局所座標系を使って書いたものである*)．　□

定理　微分方程式 (2) の任意の解に沿って，TM 上の関数

(4)
$$E = \sum_{i=1}^{m} v^i L_{v^i} - L$$

は一定である．E を L の **エネルギー関数** と呼ぶ．

証明　局所座標系を使って (2) の解を $(\bar{x}^1(t), \cdots, \bar{x}^m(t), \dot{\bar{x}}^1(t), \cdots, \dot{\bar{x}}^m(t))$ とすると，$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = (\bar{x}^1(t), \cdots, \bar{x}^m(t))$ などと略記して

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big\{ L(\bar{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\bar{x}}^i(t)\, L_{v^i}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)) \Big\}\\
&= \sum_{i=1}^{m} \{ L_{x^i}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t))\,\dot{\bar{x}}^i(t) + L_{v^i}(\bar{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t))\,\ddot{\bar{x}}^i(t) \}\\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{m} \{ \ddot{\bar{x}}^i(t)\, L_{v^i} + \dot{\bar{x}}^i(t)\, L_{v^i x^j}\, \dot{\bar{x}}^j(t) + \dot{\bar{x}}^i L_{v^i v^j}\, \ddot{\bar{x}}^j(t) \}\\
&= \sum_{i=1}^{m} \dot{\bar{x}}^i(t) \{ (-1) \times (2)\text{ 式の左辺} \} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

上の定理は L が正則でなくとも成立することに注意してもらいたい．

4° Legendre（ルジャンドル）変換，Hamilton（ハミルトン）系

前節で述べた正則性の条件は，微分方程式 (2) を (3) の形に変換するために使われていた．しかし，常微分方程式の一般論が使える形に直すのが目的

---

*）　4° の (2) 式参照．

ならば，必ずしも前節のようにやらなくても良い．(2) 式は (1) 式と同じだから，

$$p_i = L_{v^i}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$$

とおいて，$(x^1, \cdots, x^m, p_1, \cdots, p_m)$ を使って $v^1, \cdots, v^m$ を表すことができれば，前節の (1) 式は，

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_i(t) = L_{x_i}(\boldsymbol{x}(t),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}x^i(t) = \dot{x}^i(t) \end{cases}$$

となって常微分方程式論が使いやすい形になる．そこでこの考え方をこの節で詳しく考察しよう．

まず，TM 上の任意の C^∞ 級関数 L を考える．点 $(p\,;\,v) \in TM$ における L の全微分 $(DL)_{(p\,;\,v)}$ とは，多様体 TM の $(p\,;\,v)$ における接空間，$T_{(p\,;\,v)}TM$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像で

$$(DL)_{(p\,;\,v)}(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(\tilde{c}(t))$$

で定義されるものである．ただし，$\tilde{c}(t)$ は $\tilde{c}(0) = (p\,;\,v)$, $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}\tilde{c}(t) = X$ となる TM 内の曲線である．$(DL)_{(p\,;\,v)}(X)$ は関数 L の X 方向への **方向微分** と呼ばれる．この X を，$\pi^{-1}(p) = T_pM$ の方向に制限して，T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線形写像とみたものを $(D^F L)_{(p\,;\,v)}$ と書く．これは前節の物と同じで

$$(2)\qquad (D^F L)_{(p\,;\,v)}(u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} L(p\,;\ v + \varepsilon u)$$

であり，局所座標系を使えば，

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial v^i}(x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m)\,u^i$$

となる．

補題　任意の $(p\,;\,v) \in TM$ に対して，$(D^F L)_{(p\,;\,v)}$ は $T_p{}^*M$ の元である．

証明 $(D^F L)_{(p\,;\,v)}$ は T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線形写像として定義されているから，これは T_pM の相対空間，つまり，$T_p{}^*M$ の元である． □

このことより，$D^F L$ 自身は $(p\,;\,v) \in TM$ を $(D^F L)_{(p\,;\,v)} \in T^*M$ へ写す写像と思うことができるが，局所座標表示を見ればわかるように，$D^F L$ は TM から T^*M への C^∞ 級写像であり，各 $p \in M$ に対して，T_pM を $T_p{}^*M$ の中へ写す．

定義 1 $D^F L$ が TM から T^*M の上への C^∞ 級同相写像となるような L を **超正則** なラグランジェ関数と呼び，この場合の $D^F L$ を TM から T^*M への **ルジャンドル（Legendre）変換** と言う．超正則な L は無論正則である．

L が超正則のとき L のエネルギー関数 $E = \sum_{i=1}^{m} v^i L_{v^i} - L$ を，$D^F L\colon TM \to T^*M$ の逆写像との合成 $E \circ (D^F L)^{-1}$ によって T^*M 上の関数と考えたものを H とする．

定理 1 $(x^1, \cdots, x^m, p_1, \cdots, p_m)$ を T^*M の局所座標系とし，H をこの座標系で表示する．前節の (1) 式は，T^*M 上の次の方程式と同値である．ただし L は超正則としている．

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^i(t)}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t)) \\[2ex] \dfrac{dp_i(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t)) \end{cases} \qquad (1 \leqq i \leqq n)
$$

これを **ハミルトン（Hamilton）の正準方程式** と呼ぶ．

証明 超正則性の条件は，局所座標系で書けば，方程式

$$
p_i = L_{v_i}(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n) \qquad (1 \leqq i \leqq n)
$$

が $v^1, \cdots, v^n$ について逆に解けて（逆写像定理*)）

*） 後の **8°** 参照．

$$v^i = \Phi^i(x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

と書けることを意味する．$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi^1, \cdots, \Phi^n)$ とすれば

$$p_i = L_{v^i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

だから，これを使うと，

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = -L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) + \sum_{j=1}^{n} \Phi^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) p_j$$

となり，合成関数の偏微分則を使うと，

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = -L_{x^i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})), \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \Phi^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$$

が得られる．(H) 式の右辺にこれを代入して $v^i = \Phi^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ だったことを使えば，これが前節 (1) 式と同じとなる． □

これで，L が超正則の場合には，変分問題の停留条件から得られた前節の方程式 (2) は，この節の (H) と全く同等であることもわかった．(2) は 2 階の方程式であるが，接バンドル TM 上で考えればベクトル場の積分曲線を求める式に直せる．(H) は始めから余接バンドル T^*M 上で与えられているが，やはりベクトル場の積分曲線を求める式である．

そこで，前節の (2) とこの節の (H) の考え方の違いを説明しよう．前節では変分原理を基礎にしていた．そして L が超正則のときに，T^*M 上の関数 H を使って式 (H) を導いた．この話の進め方からすれば，式 (H) が扱っているのは，超正則な L から導いた H だけなのだから，前節の立場から見るとかなり狭い所に話を限ったことになる．しかし，話は，L からではなく H からも始めることができるのである．

前節では配位空間 M から出発したが，ここではまず「**相空間**」と呼ばれる多様体 T^*M（これは後に説明するが本当は余接バンドルだけでなくもっと一般なものがとれる）を考える．我々が考えるのは T^*M 内の点の動きである．

T^*M 上の実数値 C^∞ 級関数 H を 1 つ選んで固定する．H がどのように

して T^*M 内の運動を支配するのかを以下で述べよう．

P, Q を M の 2 点とし，π': $T^*M \to M$ を射影とする．$\tilde{\Omega}_{P,Q}$ を $\pi'^{-1}(P)$ の 1 点と $\pi'^{-1}(Q)$ の 1 点を結ぶ T^*M 内の曲線全体のなす集合とする．つまり，$\tilde{c} \in \tilde{\Omega}_{P,Q}$ とは，$\tilde{c}$ が $[0, 1]$ から T^*M への C^∞ 級写像で，$\tilde{c}(t) = (x(t)\,;\,p(t))$ とすると，$x(0) = P$, $x(1) = Q$ となることを意味する．大切なことは，この $\tilde{\Omega}_{P,Q}$ をあたかも（∞ 次元の）多様体であるかのごとく考えることである．

集合 $\tilde{\Omega}_{P,Q}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像（つまり，汎関数）$\tilde{J}_H$ を，

$$(3)\qquad \tilde{J}_H(\tilde{c}) = \int_0^1 \{\langle p(t),\, \dot{x}(t)\rangle_{x(t)} - H(x(t)\,;\,p(t))\}\,dt$$

で定義する．（$\langle\ ,\ \rangle_x$ の定義は **1°** 参照）

定義 2　曲線 $\tilde{c}$ が H に支配されているとは，$\tilde{c}$ が $\tilde{J}_H$ の停留点*) になっているということである．関数 H をこういう運動を支配する **ハミルトン（Hamilton）関数** と呼ぶ．

前節と同様 $\tilde{\Omega}_{P,Q}$ 内で $\tilde{c}$ から出る曲線 $\tilde{c}_\varepsilon$ を考え，

$$\tilde{c}_\varepsilon(t) = (x_\varepsilon(t)\,;\,p_\varepsilon(t))$$

とおき，

$$(4)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_0^1 \{\langle p_\varepsilon(t),\, \dot{x}_\varepsilon(t)\rangle_{x_\varepsilon(t)} - H(x_\varepsilon(t)\,;\,p_\varepsilon(t))\}\,dt = 0$$

となる $\tilde{c}(t) = (x(t)\,;\,p(t))$ を捜すのだが，計算は局所座標系で行うので前節の 図 4, 5 のように工夫する．

局所座標系で

$$(x_\varepsilon(t)\,;\,p_\varepsilon(t)) = (x_\varepsilon^1(t),\,\cdots,\,x_\varepsilon^m(t),\,p_{1,\varepsilon}(t),\,\cdots,\,p_{m,\varepsilon}(t))$$

とすると，(4) の被積分関数は，

$$\sum_{j=1}^m p_{j,\varepsilon}(t)\dot{x}_\varepsilon^j(t) - H(\boldsymbol{x}_\varepsilon(t),\,\boldsymbol{p}_\varepsilon(t)) \qquad \left(\text{ただし } \frac{d}{dt}x_\varepsilon^i = \dot{x}_\varepsilon^i\right)$$

---

*)　ラグランジェ関数のときと違って，「極値」ではなく，「停留」になっていることに注意．

だから，$\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon^i(t)=\xi^i(t)$，$\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} p_{i,\varepsilon}(t)=\eta_i(t)$ とすると，

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^m (p_i(t)\dot{\xi}^i(t)+\dot{x}^i(t)\eta_i(t))-\sum_{i=1}^m (H_{x^i}\xi^i(t)+H_{p_i}\eta_i(t))\right\}dt=0$$

$\dot{\xi}^i=\frac{d}{dt}\xi^i$ であり，$\xi^i(t_0)=\xi^i(t_1)=0$ として良いから，部分積分で

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^n\left\{\left(\frac{d}{dt}p_i(t)+H_{x^i}\right)\xi^i(t)-(\dot{x}^i-H_{p_i})\eta_i(t)\right\}dt=0$$

を得，$\xi^i(t)$，$\eta_i(t)$ は任意であることを使うと，

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x^i(t)=H_{p_i}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t))\\[2ex] \dfrac{d}{dt}p_i(t)=-H_{x^i}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t))\end{cases}$$

を得る．これは (H) と同じである．

注意してほしいのは，上の計算では正則性の条件など全く使われていないことである．

この節の最後に前節の定理に相等する定理を述べておくが，この場合，H は任意であることに注意してほしい．

定理 2 H を T^*M 上の C^∞ 級関数とする．そうすると，方程式 (H) の解に沿って H 自身は一定である．

証明 (H) の解が局所座標系で $(x^1(t),\cdots,x^n(t),p_1(t),\cdots,p_n(t))$ と表わされたとすると，

$$\frac{d}{dt}H(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t))=\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}$$
$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^j}=0.\quad\square$$

(H) の解については，上の定理の他に前節の (a) ～ (d) がそのまま成立する．さらに $(T^*M,\ H)$ が閉じているとか，いないという概念も全く同様に定

義される.

5° リーマン多様体上の Newton 力学

第1章 **7°** でリーマン多様体 $(M, (ds)^2)$ 上でニュートンの運動方程式を書いたのだが，この節ではこれを **3°**, **4°** の立場で見直してみよう.

まず，リーマン多様体 $(M, (ds)^2)$ であるがニュートン力学の立場ではこれは「初めから与えられているもの」と考えて，これに関しては疑問を持たないことにする．そして，M 内の様々な運動は M 上の関数 V によって引起されると考える．V を **ポテンシャル関数** と呼ぶ.

TM を M の接バンドルとし，$\pi : TM \to M$ を射影（つまり，$(x ; v) \in TM$ に対して，$\pi(x ; v) = x$ となる写像）とする．M 上の関数 V に対し，$V \circ \pi$ は TM 上の関数である.

$(M, (ds)^2)$ 上のニュートン力学とは，TM 上の関数

$$(1)\quad L(x ; v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_x - V \circ \pi(x ; v) \qquad (x ; v) \in TM$$

に支配される運動を扱うものである．ただし，$\langle u, v\rangle_x$ は $(ds)^2$ からきまる T_xM 上の内積で，局所座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ を使い

$$u = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x, \qquad v = \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x$$

と書けば,

$$(2)\qquad \langle u, v\rangle_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, u^i v^j$$

と書かれるものである．したがって，TM の局所座標系

$$(x^1, \cdots, x^m, v^1, \cdots, v^m)$$

を使えば，L は次の式で与えられる：

$$(3)\qquad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{x})\, v^i v^j - V(\boldsymbol{x}).$$

(1) をラグランジェ関数とするオイラーの方程式は，第 1 章 **3°** の計算とほとんど同じことを繰返せば次のようになる：

$$\sum_i g_{ik}\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{i,j}[ij;\ k]\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}+\frac{\partial}{\partial x^k}V=0$$

$$(1\leqq k\leqq m).$$

さらに，(g_{ik}) の逆行列 (g^{lk}) をかけて k で和をとれば，上の式は，次のように変る：

$$(4)\qquad \frac{d^2x^l}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{m}\left\{\begin{matrix} l \\ i\,j\end{matrix}\right\}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}g^{lk}\frac{\partial V}{\partial x^k}\quad (=-\mathrm{grad}\,V)$$

(4) 式の右辺は「力の場」を表わすと考えられる．関数 V はこの力の場に対する **ポテンシャル関数** と呼ばれる．

一方，次のことが成立する：

補題　(1) で定義された L は超正則である．

証明　$(D^F L)_{(x\,;\,v)}(u)$ は，その定義より，

$$(D^F L)_{(x\,;\,v)}(u)=\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\frac{1}{2}\langle v+\varepsilon u,\ v+\varepsilon u\rangle_x=\langle v,\ u\rangle_x\,.$$

よって，$\langle v,\ \cdot\rangle_x\in T_x{}^*M$ だから，$(D^F L)$は $(x\,;\,v)\in T_xM$ に対し $(x\,;\,\langle v,\ \cdot\,\rangle_x)\in T_x{}^*M$ を対応させる写像である．これは，TM と T^*M との間の C^∞ 級同相写像であり，かつ，各 $x\in M$ に対して，T_xM から $T_x{}^*M$ への線形同形写像となる．(**1°** の定理参照.)　□

$(D^F L)_{(x\,;\,v)}(u)$ は局所座標系を使えば，$\sum_{i,j}^{m}g_{ij}(x)\,v^j u^i$ だから

$$(D^F L)_{(x\,;\,v)}=\sum_i\big(\sum_j g_{ij}(x)\,v^j\big)\,dx^i|_x$$

と書いて良い．エネルギー関数 E は，

$$E=\sum v^i L_{v^i}-L=\frac{1}{2}\sum_{i,j}g_{ij}v^iv^j+V$$

だから，これを，

$$p_i = L_{v_i} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} v^j$$

を使って書けば，簡単な計算で，

$$H = E(D^F L)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij} p_i p_j + V$$

を得る．したがって，ハミルトンの正準方程式は，

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \displaystyle\sum_j g^{ij}(\boldsymbol{x}) p_j \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k} \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k - \dfrac{\partial V}{\partial x^i} \end{cases} \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

となる．第 2 式は，

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle_x + \frac{\partial V}{\partial x^i}\right)$$

（ただし $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'\rangle_x = \sum g^{ij}(x) p_i p_j'$ ）

と書いても良い．

さて，ニュートン力学が最も偉力を発揮したのが惑星の軌道計算であるが，それの最も単純化された場合である中心力による運動を考察しよう．

3 次元ユークリッド空間を E^3 とし，E^3 から原点 0 を除いた空間 $M = E^3 - \{0\}$ を配位空間とし，M 内を動く質点を考える．この運動を支配するラグランジェ関数 L が，

$$(6) \qquad L(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 - F(\|\boldsymbol{x}\|)$$

の形をしているとき，「**中心力による運動**」と呼ぶ．ただし，$\boldsymbol{x}$ は質点の位置ベクトル，$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル，$\|\ \|$ はベクトルの大きさを表わす．F は $(0, \infty)$ 上で定義された C^∞ 級関数とする．

運動方程式は，容易な計算で次のようになる：

$$(7) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{x}(t) = -F'(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\frac{\boldsymbol{x}(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|}$$

これでわかるように，力は常に位置ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ のスカラー倍である．これは F が（したがって L が）球対称であることからくることで，このことから次のことが得られる：

定理 TM から E^3 への写像 J を，

$$J(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} \qquad (\text{ベクトル積})$$

と定義すれば，J は (7) の解に沿って一定である．

証明
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}(t) \times \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) \times \dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{x}(t) \times \ddot{\boldsymbol{x}}(t)$$
$$= \boldsymbol{x}(t) \times \left(- F' \cdot \frac{\boldsymbol{x}(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} \right) = \boldsymbol{0}$$

したがって，$\boldsymbol{x}(t) \times \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ は一定である． □

一般に，多様体 N（上の場合は TM）上の接ベクトル場 $\mathfrak{X}$ が与えられているとして，N 上の関数 f が $\mathfrak{X}$ の任意の積分曲線に沿って一定となるとき，f を $\mathfrak{X}$ の **積分** と呼ぶ．上の定理は，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$ の成分である．

$$(8) \qquad I_1 = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 \\ v^3 & v^1 \end{vmatrix}, \qquad I_3 = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix},$$

$$(\text{ただし，} \boldsymbol{x} = (x^1,\ x^2,\ x^3),\ \ \boldsymbol{v} = (v^1,\ v^2,\ v^3))$$

が積分であることを意味している．さらに，もう1つの積分として，**3°** の最後の定理で述べたエネルギー関数 E がある．ここで扱っている中心力による運動の場合には，

$$(9) \qquad E(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + F(\|\boldsymbol{x}\|)$$

である．$E = I_0$ とすれば，(8) と合わせて，I_i $(0 \leqq i \leqq 3)$ が (7) の任意の解（これを TM 上の曲線とみている）に沿って一定に保たれる．つまり，解 $(\boldsymbol{x}(t)\,;\,\dot{\boldsymbol{x}}(t))$ について，

$$I_i(\boldsymbol{x}(t)\,;\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)) = I_i(\boldsymbol{x}(0)\,;\,\dot{\boldsymbol{x}}(0)) \qquad (0 \leqq i \leqq 3)$$

が成立する.

そこで, 座標系 (x^1, x^2, x^3) を回転して, $x^3(0)=0$, $v^3(0)=0$ となるようにしよう. I_i ($1 \leqq i \leqq 3$)は一定だから, このことは, 図 6 の E^2 内に初期値と初期微分を持つ運動は E^2 からはみだすことはないことを意味する. したがって, 話は, $E^2-\{0\}$の接バンドル $T(E^2-\{0\})$ で考えれば良い. E^2 は x^1, x^2 の座標面だから, 話は (x^1, x^2, v^1, v^2) の 4 変数の話に変る. ここでは, ($I_1=I_2=0$ だから) 実質的な積分は, E と I_3 だけとなる.

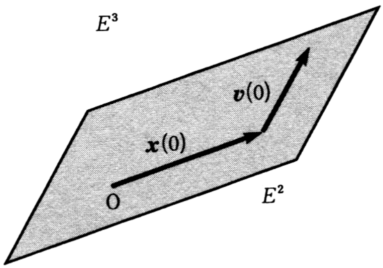


図 6

ここから先は普通は天下り式に極座標に移るのだが, どうして極座標に移るのかを考えてみよう.

まず, **4°** で述べたルジャンドル変換 $D^F L$ を, (6) で与えた L で考えると,

$$(D^F L)_{(x\,;\,v)}(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$$

だから, $D^F L$ は$(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{v})$を $(\boldsymbol{x}\,;\,\langle \boldsymbol{v}, \cdot \rangle) \in T^*(E^2-\{0\})$ に写す変換である. E^2 内に正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をとり, $\boldsymbol{e}^i = \langle \boldsymbol{e}_i, \cdot \rangle$ とすると, $\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2$ に対しては, $\langle \boldsymbol{v}, \cdot \rangle = v^1\boldsymbol{e}^1 + v^2\boldsymbol{e}^2$ であるから, このような基底に関してはルジャンドル変換は恒等変換と同じになる. そこで, $p_i = v^i$ ($i=1, 2$)とおけば, $H = E\circ(D^F L)^{-1}$, $\tilde{I}_3 = I_3\circ(D^F L)^{-1}$ はそれぞれ

$$H(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}\|^2 + F(\|\boldsymbol{x}\|), \qquad \tilde{I}_3 = x^1p_2 - x^2p_1$$

となる. ハミルトンの正準方程式は (7) と同じで

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x^i(t) = p_i(t) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}p_i(t) = -F'(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\dfrac{x^i(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} \end{cases} \qquad (i=1, 2)$$

となる. $\tilde{I}_3$ は上の (10) 式に対する積分だから, 当然, 次の式も成立している:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \tilde{I}_3}{\partial x^i}-\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{I}_3}{\partial p_i}\right)=0\,. \tag{11}$$

良く見ると，上の式は H と $\tilde{I}_3$ とが全く対称な形で入っている．したがって，H の代りに $\tilde{I}_3$ の方をハミルトン関数と思って，$\tilde{I}_3$ に関する正準方程式を考えれば，関数 H はそれに対する積分になっていると読むこともできる．$\tilde{I}_3$ に対する正準方程式は，簡単な計算で

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{dx^1}{ds}=-x^2, & \dfrac{dp_1}{ds}=-p_2 \\[2mm] \dfrac{dx^2}{ds}=x^1, & \dfrac{dp_2}{ds}=p_1\end{array}\right. \qquad (s\text{ は時間を表わす}) \tag{12}$$

となる．H は，(10) だけでなく (12) の積分曲線に沿っても一定となるのである．同様にして，$\tilde{I}_3$ も，(10) 及び (12) の積分曲線に沿って一定となる．(12) の一般解は，

$$\left\{\begin{array}{ll}x^1=r\cos(s+a), & p_1=q\cos(s+b) \\ x^2=r\sin(s+a), & p_2=q\sin(s+b)\end{array}\right. \tag{13}$$

$$(r,\ q,\ a,\ b\ \text{は定数で}\ r>0,\ q>0)$$

であるから，これを用いて H, $\tilde{I}_3$ を書けば当然 s は消えて

$$H=\frac{1}{2}q^2+F(r),$$

$$\tilde{I}_3=rq\sin(b-a)$$

となる．

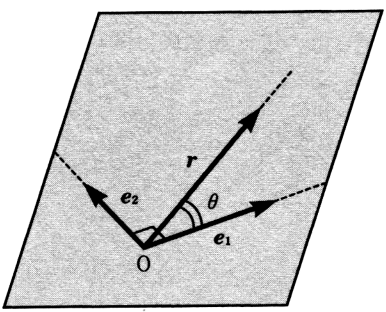


図 7　E^2 内の極座標 $\boldsymbol{e}_1$ を基準とし，$\boldsymbol{e}_2$ の側に測った角を正とする．

そこで，$(x^1,\ x^2,\ p_1,\ p_2)$ に対して極座標 $(r,\ q,\ \theta,\ \eta)$

$$\left\{\begin{array}{ll}x^1=r\cos\theta, & p_1=q\cos\eta \\ x^2=r\sin\theta, & p_2=q\sin\eta\end{array}\right.$$

を考える．関数 $f(x^1,\ x^2,\ p_1,\ p_2)$ に (13) を代入したとき s に依存しなくなるということは，f を極座標で書いたときに

$$f(r,\ q,\ \theta,\ \eta)=f(r,\ q,\ \theta+s,\ \eta+s)$$

ということだから，$s=-\eta$ とおき，$\bar{\theta}=\theta-\eta$ とすれば，f が $(r,\ q,\ \bar{\theta})$ の関数として書けることを意味する．そうすると，この座標系では，

(14) $$H=\frac{1}{2}q^2+F(r),\qquad \tilde{I}_3=-rq\sin\bar{\theta}$$

となる．H，$\tilde{I}_3$ は (10) の積分曲線に沿って一定だったから

(15) $$H(r,\ q,\ \bar{\theta})=c_1,\qquad \tilde{I}_3(r,\ q,\ \bar{\theta})=c_2$$

とおくと，どれか 1 つの変数を選んでそれを使って残りの変数を表わすことができる．これによって積分曲線が，t をパラメーターにして書いてはいないが，どのような曲線であるかがわかったことになる．

6° 積分が生成する Lie（リー）環，および Poisson（ポアソン）環

m 次元 C^∞ 級多様体 M の余接バンドル T^*M 上に C^∞ 級関数 H を固定し，これをハミルトン関数と考える．H によって支配される運動は，$(x^1,\ \cdots,\ x^m)$ を M の局所座標系，$(x^1,\ \cdots,\ x^m,\ p_1,\ \cdots,\ p_m)$ を T^*M の局所座標系としたとき，**4°** の式 (H) の解となる運動のことである．

この運動に対し，$f_1,\ \cdots,\ f_l$ なる積分が見つかったとしよう．f_j とは，(H) の解に沿って一定であるような T^*M 上の C^∞ 級関数のことであり，式で書けば **4°** の最後の定理の証明と同じ計算で，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f_j}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)=0$$

が成立するような f_j のことである．上の式の左辺のような形はしばしば出現するので次の補題の中で定義されるような $\{f,\ h\}$ なる記号を用意しておくと便利である．

補題1　T^*M 上の C^∞ 級関数 f, h に対し，局所座標系を使って，

$$\{f,\ h\} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)^{*)}$$

と定義すると，$\{f,\ h\}$ は（定義だけを見ると局所座標系のとり方に依存しているが，実はそうではなく）T^*M 上の関数を定義している．

証明　$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$ を M 上の別の局所座標系とし，それに応じた，T^*M の局所座標系を $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m, \bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_m)$ としよう．$(x^1, \cdots, x^m)$ の定義域と，$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$ のそれとの共通部分で

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \cdots, x^m) \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

という関係があれば，$(x^1, \cdots, x^m, p_1, \cdots, p_m)$ と $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m, \bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_m)$ との間には，**1°** の T^*M の座標変換の公式により

$$\begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \cdots, x^m) \\ \bar{p}_i = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} p_l \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}(\bar{x}^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \bar{x}^m(\boldsymbol{x})) \end{cases} \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

という関係がある．これを使うと，少し長い計算で，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{m}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_j}\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial h}{\partial \bar{p}_k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} + \frac{\partial h}{\partial \bar{p}_j}\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x^i}\right)\right\}$$

これに，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta^j_k$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{x}^k} = 0$ を使うと，結局

$$\text{上式} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial h}{\partial \bar{p}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_j}\frac{\partial h}{\partial \bar{x}^j}\right)$$

となり，どの座標系で定義したものも同じとなることがわかるから，$\{f,\ h\}$ は T^*M 上の関数として定義されたことがわかる．　□

上の記号を用いると，f が微分方程式 (H) の積分であるとは $\{H,\ f\} = 0$ となることと同じことである．$\{f,\ h\}$ は **ポアソン** (Poisson) **の括弧式** と呼

---

*)　後のためにはこれを $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)h$ と理解すると良い．矢印はどちら側を微分するかを表わす．

ばれる．これは便利な記号で，特に次のような関係式のあることが計算で確かめられる．

補題 2 f, g, h は T^*M 上の C^∞ 級関数，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とすると

(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$, $\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f, g\} + \mu\{f, h\}$.

(ii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ 　(ヤコビ恒等式)

上の補題を使うと次のことが得られる．

系 ハミルトン関数 H に支配される運動において，$f_1, \cdots, f_l$ が積分であるならば，$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ ($c_i \in \boldsymbol{R}$) も $\{f_i, f_j\}$ ($1 \leqq i, j \leqq m$) も積分である．

証明 第 1 式は自明，2 番目は前補題 (ii) を使うと容易．□

上の結果によれば，いくつかの積分を知れば $\{f, g\}$ を作ることにより次々に新しい積分が作れることになるのだから，極めて強力な手段のように見える．しかし，このような“うまい”話はどこかで終りになるはずで，$f_1, \cdots, f_l$ に対して，$\sum c_i f_i$ とか $\{f_i, f_j\}$, $\{f_i, \{f_j, f_k\}\}$ とかを組合わせて新しい積分を次々に作って，$f_1, \cdots, f_k$ まで得られたとして，次に $\{f_i, f_j\}$ ($1 \leqq i, j \leqq k$) を作って見たら，これがこれまで作った積分の 1 次結合で書けてしまったとしたら，つまり，

$$\{f_i, f_j\} = \sum_{k=1}^{k} c_{ij}{}^k f_k, \qquad c_{ij}{}^k \in \boldsymbol{R}$$

となってしまったならば，もはや新しい積分が見つかったことにはならないであろう．これまで見つかった積分が張っている線形空間自身は $\{\ ,\ \}$ を作ることによって広がらないからである．

そこで，積分 $f_1, \cdots, f_l$ から出発し，次の 2 つの操作

(1) $\{\ ,\ \}$ を作る．

(2) 実数を係数として 1 次結合を作る．

を組合わせて作り出される関数の全体を$\{f_1, \cdots, f_l\}$としよう．$\{f_1, \cdots, f_l\}$が次の性質を持つことはすぐわかるであろう．

（a）　$\{f_1, \cdots, f_l\}$は$\boldsymbol{R}$を係数体とする線形空間．

（b）　$f, g \in \{f_1, \cdots, f_l\}$ならば，$\{f, g\} \in \{f_1, \cdots, f_l\}$．

一般に，線形空間Vに，括弧積と称される積$\{\ ,\ \}$（これは$[\ ,\ ]$と書かれることが多い）が定義され，それが補題2の（i），（ii）の性質を持つとき，このような積を持ったVのことを**リー環**と呼んでいる．$\{f_1, \cdots, f_l\}$はポアソン括弧に関してリー環をなしているのであるが，特に$f_1, \cdots, f_l$から作られているので，$f_1, \cdots, f_l$によって**生成されたリー環**と呼ぶ．特に，$f_1, \cdots, f_l$が微分方程式（H）の積分であれば，$\{f_1, \cdots, f_l\}$の任意の元も積分である．

ところで，ポアソン括弧式$\{f, g\}$は次のような性質も持っていることが簡単な計算で確かめられる．

補題3　$f, g, h \in C^\infty(T^*M)$のとき，

$$\{f, g\cdot h\} = \{f, g\}\cdot h + g\cdot\{f, h\} \qquad \text{（ライプニッツ恒等式）}$$

この補題を使うと，次のことが容易にわかる．

系　f, gが（H）の積分ならば$f\cdot g$もそうである．

上の系と，前に述べたことを組合わせると，微分方程式（H）の積分$f_1, \cdots, f_l$を知れば，これをもとにして$\{f_i, f_j\}$や$f_i f_j$，およびそれらの1次結合を作るといった操作を何回も繰返していけば，ついには，次のような性質を持った，$\boldsymbol{R}$を係数体として持つ線形空間$P[f_1, \cdots, f_l]$を得る：

（0）　任意の$f \in P[f_1, \cdots, f_l]$は（H）の積分である．

（1）　$f, g \in P[f_1, \cdots, f_l]$ならば，　$\{f, g\} \in P[f_1, \cdots, f_l]$

（2）　$f, g \in P[f_1, \cdots, f_l]$ならば，　$f\cdot g \in P[f_1, \cdots, f_l]$．

一般に線形空間Vに次の性質をみたす2種類の演算，・および$\{\ ,\ \}$が定

義されているものを **ポアソン**(Poisson)**環**と呼ぶ：

（a） V は $\{\ ,\ \}$ によってリー環になる．

（b） $f, g, h \in V$，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とすると，

(b.1) $f \cdot g = g \cdot h$，　　$f \cdot (\lambda g + \mu h) = \lambda f \cdot g + \mu f \cdot h$

(b.2) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

（c） $f, g, h \in V$ のとき，

$$\{f,\ g \cdot h\} = \{f,\ g\} \cdot h + g \cdot \{f,\ h\}.$$

この用語を用いれば，$P[f_1, \cdots, f_l]$ は $f_1, \cdots, f_l$ により生成されたポアソン環であり，これの任意の元は (H) の積分である．

積分 $f_1, \cdots, f_l$ からなるべくたくさんの積分を作り出す目的で $\{f,\ g\}$ とか $f \cdot g$ とかの操作を上で考えたのであるが，このような演算的な操作のほかに極限をとるという重要な操作があるが，これについては後の章で述べる．

7° Poisson（ポアソン）多様体，symplectic（シンプレクティック）多様体

前節でポアソン環なるものを定義したのであるが，それをもとに，この節ではまず次の定義をする．

定義 1 C^∞ 級多様体 M が **ポアソン多様体** であるとは，M 上の C^∞ 級関数の全体 $C^\infty(M)$ がポアソン環となる場合を言う．つまり，$C^\infty(M)$ が通常の積の他に，次の性質をみたす括弧積を持っている場合を言う：

（a） $\{f,\ g\} = -\{g,\ f\}$，

$$\{f,\ \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f,\ g\} + \mu\{f,\ h\} \qquad (\lambda,\ \mu \in \boldsymbol{R}).$$

（b） $\{f,\ \{g,\ h\}\} + \{g,\ \{h,\ f\}\} + \{h,\ \{f,\ g\}\} = 0.$

（c）　$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

前節で $H=1$ の場合を考えてみれば，任意の C^∞ 級多様体 N について，T^*N はポアソン多様体となることがわかる．まず，ポアソン多様体なるものが，概念的に，余接バンドルとどの位違うものかなどを考えてみよう．

M をポアソン多様体とする．

定理　$f \in C^\infty(M)$ に対し，$\mathrm{ad}(f): C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を，

$$\mathrm{ad}(f)h = \{f, h\}$$

で定義すれば，$\mathrm{ad}(f)$ は M 上の C^∞ 級ベクトル場である．

証明　一般に，線形写像 $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

をみたすとき，$C^\infty(M)$ の「**微分**」(derivation) であると呼ばれる．このような X が C^∞ 級ベクトル場であることを言えばよい．これは次のような順序で証明される：

（a）　$X1=0$　∵　$1\cdot 1=1$ だから，$X1=(X1)\cdot 1+1\cdot(X1)=2X1$. よって，$X1=0$. このことから，線形性を使って，$Xc=0$（$c=$ 定数）．

（b）　$f(p)=g(p)=0$ ならば $(Xfg)(p)=0$.

$$\because \quad (Xfg)(p) = (Xf)(p)g(p) + f(p)(Xg)(p) = 0$$

（c）　$(Xf)(p)$ は $(df)_p$ にしか依存しない．

∵　p を原点とするような局所座標系を $(x^1, \cdots, x^m)$ とする．$f(p)=0$, $(df)_p=0$ ならば，f を $(x^1, \cdots, x^m)$ で表わして，原点の所でテイラー展開すれば，

$$f(x^1, \cdots, x^m) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x^1, \cdots, x^m), \qquad g(0, \cdots, 0) = 0$$

の形に書けるから，(b) を使えば，$(Xf)(p)=0$ であることがわかる．したがって，$(df)_p = (d\tilde{f})_p$ ならば $(Xf)(p) = (X\tilde{f})(p)$ となる．

（d）　X_p を $X_p f = (Xf)(p)$ によって定義される $C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像とすると，実はこの X_p は (c) により，$T_p{}^*M$（**1°** 参照）から $\boldsymbol{R}$ への線形写像と考えて良い．つまり，X_p は $T_p{}^*M$ の相対空間 $(T_p{}^*M)^*$ の元である．一方，T_pM の

相対空間が $T_p{}^*M$ だったから，$\dim T_pM = m < \infty$ より，$(T_p{}^*M)^* = T_pM$．つまり，X_p は M の接ベクトルである．

（e）　再び，p の近くでの局所座標系を $(x^1, \cdots, x^m)$ とし，この座標関数 x^i（$1 \leqq i \leqq m$）の定義域を U とする．p の近傍 V を $\overline{V} \subset U$ となるようにとり固定すれば，$C^\infty(M)$ の元 $h_1, h_2, \cdots, h_m$ で，$\overline{V}$ 上では $h_i = x^i$，$M - U$ 上で $h_i = 0$ となるものがある．（各自考えてみよ．）　これを $(x^1, \cdots, x^m)$ の代りに使えば，$q \in V$ のときには，$q = (q^1, \cdots, q^m) = \boldsymbol{q}$ として，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{q}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{q})(h_i - q^i) + ((\boldsymbol{h} - \boldsymbol{q}) \text{ の 2 次以上})$$

と $\boldsymbol{q}$ の近くでは書けるから，(a)，(c) を使って，

$$(Xf)(q) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{q})(Xh_i)(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{q})(Xx^i)(\boldsymbol{q}), \qquad \forall \boldsymbol{q} \in V,$$

を得る．

$h_i \in C^\infty(M)$ だから Xh_i は V 上で C^∞ 級であり，これを，X^i（$\in C^\infty(V)$）と書けば，V 上では

$$Xf = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad X^i = Xx^i$$

と書いて良い．つまり，任意の $q \in V$ において，

$$X_q = \sum_{i=1}^m X^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q, \qquad X^i(q) = (Xx^i)(q),$$

である．

V は p の近傍であり，p は任意だったから，これは X が C^∞ 級のベクトル場であることを示している．　□

系　$p \in M$ に対し，$\{\ ,\ \}_p$ を次式で定義される $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への双線形写像とする：

$$\{f, g\}_p = \{f, g\}(p)$$

そうすると，$\{f, g\}_p$ は，$(df)_p$，$(dg)_p$ にのみ依存して定まり，したがって，$\{\ ,\ \}_p$ は $T_p{}^*M \times T_p{}^*M$ から $\boldsymbol{R}$ への双線形写像と思うことができる．

前定理によれば，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して，$\mathrm{ad}(f)$ は M 上の C^∞ 級ベ

クトル場であり，それは局所座標系では

$$\mathrm{ad}(f)=\sum_{i=1}^{m}\{f,\ x^i\}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

と書かれる．

さらに，$\{x^i,\ f\}$ に対しても上の公式を使えば，

$$\{f,\ g\}(p)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\{x^j,\ x^i\}_p\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\frac{\partial g}{\partial x^i}(p)$$

となる．$\{x^j,\ x^i\}_p$ は $(dx^j)_p$, $(dx^i)_p$ にしかよらないから，これを $\{(dx^j)_p,\ (dx^i)_p\}_p$ と書いても良い．

次の補題は線形代数の標準的応用問題である：

補題　V を $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元ベクトル空間, S を $V\times V$ から $\boldsymbol{R}$ への双線形写像で，$S(u,\ v)=-S(v,\ u)$ をみたすものとする（歪対称性）．このとき V の基底

$$\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_r,\ \ \boldsymbol{f}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_r,\ \ \boldsymbol{g}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_l \qquad (\dim V=2r+l)$$

を上手にとると，次が成立するようにできる：

$$(*)\quad\begin{cases} S'(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=S(\boldsymbol{f}_i,\ \boldsymbol{f}_j)=0 & (1\leqq i,\ j\leqq r)\\ S(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{g}_k)=S(\boldsymbol{f}_i,\ \boldsymbol{g}_k)=0 & (1\leqq i\leqq r,\ 1\leqq k\leqq l)\\ S(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{f}_j)=\delta_{ij} & (1\leqq i,\ j\leqq r)\end{cases}$$

証明は省略するが, これは普通の2次形式の標準形定理と対をなすもので, 複素数にまで話を広げておけば類似した考え方で証明できる．

上の補題で，$2r$ を S の**階数**（rank）と呼ぶ．

$\{\ ,\ \}_p$ を $T_p{}^*M\times T_p{}^*M$ から $\boldsymbol{R}$ への歪対称双線形写像と見て前補題を使えば，各 $p\in M$ において，$T_p{}^*M$ の基底として（$*$）の性質を持ったものがとれることになる．

定義2　各 $p\in M$ において，$\{\ ,\ \}_p\colon T_p{}^*M\times T_p{}^*M\to\boldsymbol{R}$ の階数が $\dim M$ に等しいようなポアソン多様体を**シンプレクティック**

(symplectic) **多様体** と呼ぶ．これを相空間と呼ぶこともある．シンプレクティック多様体は偶数次元である．

N を C^∞ 級多様体とするとき，T^*N はシンプレクティック多様体である．なぜなら，T^*N においては，$(x^1, \cdots, x^n)$ を N の局所座標系とすると，$(x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n)$ が局所座標系であり，これを使うと，$y^i = x^i$，$y^{n+i} = p_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ として

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{i,n+j} - \delta_{n+i,j})\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^{n+j}}$$

と書けるからである．

8° 逆写像定理，陰関数定理，フロベニウスの定理

ポアソン多様体や，後で述べるポアソン写像の局所的性質を調べるために必要になる定理をこの節でまとめて解説しておく．証明の方は，例えば，次を参照してもらいたい．

拙著：多変数の微分積分（数学シリーズ），裳華房．

無限次元リー群論（紀伊國屋数学叢書 15），p. 35-p. 43，紀伊國屋書店．

定理 1 （逆写像定理） U, V を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合，φ を U から V への C^∞ 級写像とする．$\boldsymbol{a} \in U$ に対し，$\boldsymbol{b} = \varphi(\boldsymbol{a}) \in V$ とする．このとき，点 $\boldsymbol{a}$ における φ の微分写像 $(D\varphi)_{\boldsymbol{a}}$: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が逆写像を持つならば，φ は $\boldsymbol{a}$ の近傍から $\boldsymbol{b}$ の近傍の上への C^∞ 級微分同相写像である．

用語の説明をしておこう．まず写像 φ は成分で書けば $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \varphi^n(\boldsymbol{x}))$ と書ける．ただし，$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ である．微分写像 $(D\varphi)_{\boldsymbol{a}}$ と

は，行列 $\left(\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{a})\right)_{1\leqq i,j\leqq n}$ が定義する線形写像のことである．したがって，この行列に逆行列があることと，$(D\varphi)_{\boldsymbol{a}}$ に逆写像があることとは同じことである．φ が $\boldsymbol{a}$ の近傍 $U'_{\boldsymbol{a}}$ から，$\boldsymbol{b}$ の近傍，$V'_{\boldsymbol{b}}$ への C^∞ 級微分同相写像とは，φ: $U'_{\boldsymbol{a}} \to V'_{\boldsymbol{b}}$ が1対1で $\varphi(U'_{\boldsymbol{a}}) = V'_{\boldsymbol{b}}$ であり，φ^{-1} も C^∞ 級写像になる場合を言う．大まかに言えば線形方程式

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{a})$$

が X_i ($1 \leqq i \leqq n$) に関して解けるならば，非線形の方程式

$$\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$$

が，$\boldsymbol{y}$ が十分 $\boldsymbol{b}$ に近いときには $\boldsymbol{x}$ について逆に解けることを意味する．

この定理は局所座標系を作るときに大切で，例えば次のような使い方をする：

系 m 次元 C^∞ 級多様体 M の1点 p の近傍で定義された C^∞ 級関数 $f_1, \cdots, f_m$ について，$(df_1)_p, \cdots, (df_m)_p$ が余接空間 $T_p{}^*M$ を張るならば $(f_1, \cdots, f_m)$ は p の近傍の局所座標系と思って良い．

証明 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ とし，$\boldsymbol{f}(p) = \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ とすれば $\boldsymbol{f}$ は p の近傍から $\boldsymbol{R}^m$ への C^∞ 級写像であり $(D\boldsymbol{f})_p$: $T_pM \to \boldsymbol{R}^m$ の階数は m であるから上の定理が使える． □

次に逆写像定理を用いて証明される陰関数定理について述べるが，そのために少し用語を設定しよう．まず多様体 M の p の近傍における(局所)座標系 $(x^1, \cdots, x^m)$ であるが，これは上でも述べたように，p の近傍から $\boldsymbol{R}^m$ への C^∞ 級の写像 ψ と解釈される．つまり，$\psi(p') = (x^1(p'), \cdots, x^m(p'))$ である．ただし，$(D\psi)_p$ の階数は m である．

2つの C^∞ 級多様体 M, N の次元を m, n とし，M から N への C^∞ 級写像 φ を考える．$p \in M$ を固定し，$q = \varphi(p)$ とする．p の近傍の座標系を $(x^1, \cdots, x^m)$ とし，q の近傍のそれを $(y^1, \cdots, y^m)$ とする．そして，さらにこれらを $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^n$ への写像と考え，それぞれ ψ, ψ' とする．写像 φ をこれらの座標系で“表示する”と述べれば言葉の響きからどのようなことをするのか察しがつくであろうが，正確には，「$\boldsymbol{R}^m$ の点 $\psi(p)$ の近傍から $\boldsymbol{R}^n$ への C^∞ 級写像 $\psi'\cdot\varphi\cdot\psi^{-1}$ を考える」という意味である．$\psi'\cdot\varphi\cdot\psi^{-1}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{R}^n$ への写像だから成分で表示ができるし，変数 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合内を動くのだからこれも成分で表示できる．$\psi'\cdot\varphi\cdot\psi^{-1}$ はいわば写像 φ を具体的に書いただけのものであるから，ψ, ψ' を書かずに φ のままで代用させてしまうことが多い．

定理 2 C^∞ 級多様体 M, N の次元を m, n とし，φ を M から N への C^∞ 級写像とする．$p \in M$ とし，$q = \varphi(p)$ とする．さらに，点 p における φ の微分写像 $(D\varphi)_p$： $T_pM \to T_qN$ の階数が目一杯（full，つまり，階数が m, n の小さい方に一致）であるとする．このとき，p の近傍 U_p, q の近傍 V_q の座標系 $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$, $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ を上手にとると，この座標系による φ の表示，$\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \cdots, \xi_m)$（$1 \leqq i \leqq n$）が次のような簡単な形になるようにできる．

（a） $m \leqq n$ の場合：

$$\varphi_i(\xi_1, \cdots, \xi_m) = \xi_i \ (1 \leqq i \leqq m), \quad \varphi_j(\xi_1, \cdots, \xi_m) = 0 \ (m < j \leqq n).$$

（b） $m > n$ の場合： $\varphi_i(\xi_1, \cdots, \xi_m) = \xi_i \ (1 \leqq i \leqq n)$.

上の定理は要するに，φ は，$m \leqq n$ のときには $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ をそのまま $(\xi_1, \cdots, \xi_m, 0, \cdots, 0)$ に，$m > n$ の場合には $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ を後を切り落して $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に写しているだけというものであって，このように見えるように上手に局所座標系をとることができるというのであるが，この場合階数が目一杯という条件が大切で，これがないと φ の局所表示は一般に極めて複雑なものになってしまう．

次にフロベニウスの定理を述べるが，ここで述べるのは，**2**°の定理4を少し一般にしただけのものである．**2**°, **7**°で多様体上の C^∞ 級ベクトル場なるものを説明した．ベクトル場 X とは局所座標系で表示すれば，偏微分作用素

$$X=\sum_{i=1}^{m} X^{i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \qquad m=\dim M$$

の形に表示できるものであり，**7**°で述べたことを使えば $C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への線形写像 X で，「微分」と呼ばれる性質

$$X(f\cdot g)=(Xf)\cdot g+f(X\cdot g)$$

をみたすもののことである．

補題　X, Y を多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．$f\in C^\infty(M)$ に対して，$[X, Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$ と定義すれば，$[X, Y]$ も C^∞ 級ベクトル場である．

証明　$[X, Y]: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ が線形写像であることは明らかだから，$[X, Y](f\cdot g)=([X, Y]f)\cdot g+f\cdot([X, Y]g)$　を確かめれば良い．ちなみに，X, Y の局所表示が

$$X=\sum X^{i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \qquad Y=\sum Y^{j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^{j}}$$

のとき，

$$[X, Y]=\sum_{i}\left(\sum_{j}\left(X^{j}\frac{\partial Y^{i}}{\partial x^{j}}-Y^{j}\frac{\partial X^{i}}{\partial x^{j}}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^{i}}$$

である．　□

上で定義した $[X, Y]$ を**リー(Lie)括弧積**と呼ぶ．これは，

(i)　$[X, Y]=-[Y, X]$

(ii)　$[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$

をみたす．つまり，多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場の全体 $\mathscr{X}(M)$ はリー括弧積に関してリー環をなしている．

以下では，$\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級ベクトル場のみを考える

が，U 自身も立派な多様体であることには注意してほしい．

定理 3 U 上で定義された C^∞ 級ベクトル場 $X_1, \cdots, X_s$ が，

（i） $[X_i, X_j]=0$ 　　$(1 \leqq i, j \leqq s)$，

（ii） U の各点 p で，$X_1(p), \cdots, X_s(p)$ が張る T_pU の部分空間の次元が一定で s

という条件をみたすならば，p の近傍で座標系 $x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_l$（$s+l=m$）を上手にとれば，これによる X_i（$1 \leqq i \leqq s$）の局所表示が次のような簡単な形になるようにとれる：

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

上のことから，$X_1(p), \cdots, X_s(p)$ で張られる空間の基底としては，$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p$，$\cdots$，$\left.\frac{\partial}{\partial x_r}\right|_p$ がとれることもわかる．上の定理は要するに，$(y_1, \cdots, y_l)=(c_1, \cdots, c_l)$ とおいた $(x_1, \cdots, x_s)$ 座標平面に平行な平面に，各 X_i は接していることを述べている．この平面はもとの座標系で見れば s 次元の曲面となっているので，これを，$X_1, \cdots, X_s$ の **積分曲面** と呼ぶ．点 p' を p の近くに与えれば，p' を通る積分曲面がただ 1 枚定まる．

さらに，$X_1, \cdots, X_s$ がパラメーター $\boldsymbol{t}=(t_1, \cdots, t_k)$ に C^∞ 級に依存しているときには，上の（$x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_l$）も $\boldsymbol{t}$ に関して C^∞ 級に依存するようにとることができることが知られている．

9° ポアソン多様体の局所標準座標系

M を m 次元ポアソン多様体とし，$p \in M$ とする．**7°** の補題により，$\{\ ,\ \}_p$ の階数を $2r$ とすれば，$T_p{}^*M$ の基底

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_r, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_l) \qquad (2r+l=m)$$

で, $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\}_p = \{\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\}_p = 0$, $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{g}_k\}_p = \{\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{g}_k\}_p = 0$ でかつ, $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j\}_p = \delta_{ij}$ となるものがある. **1°** における $T_p{}^*M$ の作り方から, この基底を構成するコベクトルは何か M の C^∞ 級関数の1次の項として書けるとして良い. つまり, $C^\infty(M)$ の元

$$(f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_{2r}, f_{2r+1}, \cdots, f_m)$$

があって, $\boldsymbol{e}_i = (df_i)_p$, $\boldsymbol{f}_i = (df_{r+i})_p$, $\boldsymbol{g}_j = (df_{2r+j})_p$ として良い. $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ とし, $\boldsymbol{f}$ を M から $\boldsymbol{R}^m$ への C^∞ 級写像と考えれば逆写像定理により, $\boldsymbol{f}$ を p の近傍での座標系と思うことができる. つまり, $(f_1(q), \cdots, f_m(q))$ を p の近くにある点 q の局所座標と思うことができる. この局所座標系を次々に修正してなるべく簡単な形にしたいというのがこの節の目標である.

そこで, 改めて, f_1 を x_1 と書く. $\mathrm{ad}(x_1)$ は前節の定理により M 上のベクトル場であるが, $\mathrm{ad}(x_1)x_1 = \{x_1, x_1\} = 0$ だから, $\mathrm{ad}(x_1)$ の積分曲線に沿って x_1 は一定の値になる. 一方, $\mathrm{ad}(x_1)f_{r+1}(p) = \{x_1, f_{r+1}\}(p) = 1$ だから, $\mathrm{ad}(x_1)(p) \neq 0$ であり, **2°** の定理4を使うと, p を原点とする局所座標系 $(y_1, \cdots, y_m)$ で, この座標系での $\mathrm{ad}(x_1)$ の表示が,

$$\mathrm{ad}(x_1) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

となるものがあることがわかる. このような $(y_1, \cdots, y_m)$ のとり方は無論たくさんあるのだが, どれをとっても,

$$\{x_1, y_1\} = 1$$

が成立していることに注意しておく.

補題1　$(y_1, \cdots, y_m)$ を上手にとると, $\mathrm{ad}(x_1) = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$ ばかりでなく, $(dy_2)_p, \cdots, (dy_m)_p$ で張られる $T_p{}^*M$ の部分空間と, $(dx_1)_p, (df_2)_p, \cdots, (df_r)_p, (df_{r+2})_p, \cdots, (df_m)_p$ で張られるものが同じとなり, さらに $(df_{r+1})_p = (dy_1)_p$ となるようにできる.

証明 $\mathrm{ad}(x_1)=\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ となるような座標系 $(y_1,\cdots,y_m)$ を点 p が原点となるようにとれば，$j\neq r+1$ のときには

$$\left\langle (df_j)_p,\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p\right\rangle=\frac{\partial f_j}{\partial y_1}(p)=\{x_1,f_j\}(p)=0$$

であり，一方

$$\left\langle (dy_i)_p,\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p\right\rangle=\frac{\partial y_i}{\partial y_1}(p)=0 \qquad (2\leqq i\leqq m)$$

だから，$(dy_2)_p,\cdots,(dy_m)_p$ の張っている空間と $\{(df_j)_p;\ j\neq r+1\}$ の張っている空間は同じ空間となる．

$(df_{r+1})_p=\sum_{i=1}^m a_i(dy_i)_p$ と書けば，$\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial y_1}(p)=1$ より，$a_1=1$ だから，

$$\begin{cases} y_1'=y_1+\sum_{i=2}^m a_iy_i \\ y_j'=y_j \qquad (2\leqq j\leqq m)\end{cases}$$

と座標を変換すれば，$\dfrac{\partial}{\partial y_1}=\dfrac{\partial}{\partial y_1'}$ であり，かつ $(df_{r+1})_p=(dy_1')_p$ となる．$y_1',\cdots,y_m'$ を改めて，$y_1,\cdots,y_m$ とすればこれが求めるものである． □

$x_1,f_2,\cdots,f_m$ を $(y_1,\cdots,y_m)$ の関数として見れば，$\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}=\{x_1,x_1\}=0$ だから，x_1 は y_1 を含まず，さらに

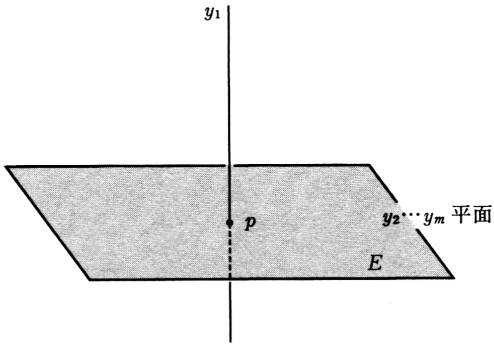


図 8 f_i を $y_2\cdots y_m$ 平面に制限する．

$$\left\langle (df_j)_p,\ \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_p \right\rangle = 0 \qquad (j \neq r+1)$$

だから，$(df_j)_p$（$j \neq r+1$）は $(dy_1)_p$ 成分を含まない．そこで $(y_1, \cdots, y_m) = (y_1, \boldsymbol{y}')$ と書き，

$$\tilde{f}_j(\boldsymbol{y}') = f_j(0, \boldsymbol{y}') \qquad (j \neq r+1) \qquad (図8)$$

とし，$(x_1, f_2, \cdots, f_m)$ の代りに $(x_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_r, y_1, \tilde{f}_{r+2}, \cdots, \tilde{f}_m)$ を考えれば，$(d\tilde{f}_j)_p = (df_j)_p$，$(dy_1)_p = (df_{r+1})_p$ だから次のことがわかる．

補題 2　(a)　$\{x_1, y_1\} = 1$，$\{x_1, x_1\} = \{y_1, y_1\} = 0$

(b)　$\{x_1, \tilde{f}_j\} = 0$　$(j \neq r+1)$　（$\tilde{f}_j$ は y_1 を含まないから）

(c)　$\tilde{f}_1 = x_1$，$\tilde{f}_{r+1} = y_1$ とすれば，$(\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_m)$ は p の所で $\{\ ,\ \}_p$ に関して $f_1, \cdots, f_m$ と同じ性質を持つ．つまり，

$$(d\tilde{f}_i)_p = \boldsymbol{e}_i, \qquad (d\tilde{f}_{r+i})_p = \boldsymbol{f}_i, \qquad (df_{2r+k})_p = \boldsymbol{g}_k$$

が成立する．

上の $(x_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_r, y_1, \tilde{f}_{r+2}, \cdots, \tilde{f}_m)$ は $(y_1, \cdots, y_m)$ の関数として与えられ，x_1 も $\tilde{f}_j$（$j \neq r+1$）も変数 y_1 を含んでいないのであるが，これをさらに修正することにより，次が得られる：

補題 3　$\hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_r, \hat{f}_{r+2}, \cdots, \hat{f}_m$ を上手にとると，次が成立：

(a)　$\{x_1, \hat{f}_j\} = \{y_1, \hat{f}_j\} = 0$　　$(2 \leqq j \leqq r,\ r+2 \leqq j \leqq m)$

(b)　$(d\hat{f}_i)_p = \boldsymbol{e}_i$，　$(d\hat{f}_{r+i})_p = \boldsymbol{f}_i$　　$(2 \leqq i \leqq r)$

$(d\hat{f}_{2r+k})_p = \boldsymbol{g}_k$　　$(1 \leqq k \leqq m-2r)$

証明　$\tilde{f}_j$ は y_1 を含まず，$\boldsymbol{y}' = (y_2, \cdots, y_m)$ のみの関数であるが，$\mathrm{ad}(y_1)$ を考えると，$\mathrm{ad}(y_1)y_1 = 0$ だから，このベクトル場は $(y_2, \cdots, y_m)$ 平面（図8）に接している．そこで，y_1 はそのままにして，$(y_2, \cdots, y_m)$ 平面 E^{m-1} の原点近くの局所座標系 $(z_2, \cdots, z_m)$ を上手に選べば，E^{m-1} の原点の近くでは，

$$\mathrm{ad}(y_1) = \frac{\partial}{\partial z_2}$$

となるようにできる．$\tilde{f}_j$ を $(z_2, \cdots, z_m)$ の関数と考え，$(z_2, \cdots, z_m)=(z_2, z')$ とおき，

$$\hat{f}_j(z')=\tilde{f}_j(0, z')$$

とおけば，

$$\left\langle (d\tilde{f}_j)_p, \left.\frac{\partial}{\partial z_2}\right|_p \right\rangle = \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial z_2}(0)=\{y_1, \tilde{f}_j\}(p)=0$$

だから $(d\tilde{f}_j)_p$ は $(dz_2)_p$ 成分を持たず，これより，

$$(d\hat{f}_j)_p=(d\tilde{f}_j)_p$$

だから (b) が成立する．

一方，$\{y_1, \hat{f}_j\}=\dfrac{\partial \hat{f}_j}{\partial z_2}=0$ であり，y_1 はそのままであったから $\{x_1, \hat{f}_j\}=0$ も成立する．　□

ここで，改めて，$(x_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_r, y_1, \hat{f}_{r+2}, \cdots, \hat{f}_m)$ を

$$(x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_l) \qquad (2r+l=m)$$

とおくと，逆写像定理により，これも p の近傍での局所座標系と思うことができる．$\{x_1, y_1\}=1$ であり，

(＊)　　$\{\ x_1, y_1$ 以外の元 $\}=\{\ y_1, x_1$ 以外の元 $\}=0$

である．これより，$\mathrm{ad}(x_1)$，$\mathrm{ad}(y_1)$ を求めてみれば容易に

$$\mathrm{ad}(x_1)=\frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad \mathrm{ad}(y_1)=-\frac{\partial}{\partial x_1}$$

であることがわかる．$\{x_1, x_1\}=\{y_1, y_1\}=0$，$\{x_1, y_1\}=1$ 以外の括弧積（例えば $\{x_2, x_3\}$，$\{x_2, y_2\}$ など）は一般に定数関数とはならないが，上の (＊) の性質と，恒等式

$$\{f, \{g, h\}\}=\{\{f, g\}, h\}+\{g, \{f, h\}\}$$

とにより，変数 x_1, y_1 を含まないことがわかる．つまり $(x_2, \cdots, x_r, y_2, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_l)$ なる $2(r-1)+l$ 個の変数の組は括弧積を何回行っても再びこの変数の関数として書けるのである．$x_1=y_1=0$ とした $(x_2, \cdots, z_l)$ 平

面で考えれば，これは，$m-2$ 次元になってはいるが，最初の状態と同じである．したがって，これまでと全く同じ議論を $2(r-1)+l$ 個の座標関数 $(x_2, \cdots, x_r, y_2 \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_l)$ について繰返すことができる．この繰返しを r 回行えば，次の定理に到達する．

定理　M をポアソン多様体，$p \in M$ とする．$\{\ ,\ \}_p$ の階数が $2r$ のとき，p を原点とする局所座標系

$$(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_l), \qquad 2r + l = m$$

で，次の性質をみたすものがとれる：

(a)　$\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$, $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$　　$(1 \leqq i, j \leqq r)$

(b)　$\{x_i, z_k\} = \{y_i, z_k\} = 0$　　$(1 \leqq i \leqq r, 1 \leqq k \leqq l)$

(c)　$\{z_\alpha, z_\beta\}(p) = 0$　　$(1 \leqq \alpha, \beta \leqq l)$

これを **局所標準座標系** と呼ぶ．

p 以外の所での $\{z_\alpha, z_\beta\}$ は一般には $\neq 0$ となるのであるが，もしも，上の座標関数の定義域内の $q\ (\neq p)$ で $\{z_\alpha, z_\beta\}(q) \neq 0$ だとすると，$\{\ ,\ \}_q$ の階数は $\geqq r+1$ となる．したがって次のこともわかる：

系　上の定理で，もし $\{\ ,\ \}_q$ の階数が p の近傍上で一定で $2r$ ならば，(c) は，次におきかわる：

(c′)　$\{z_\alpha, z_\beta\} = 0$　　$(1 \leqq \alpha, \beta \leqq l)$

上の定理をシンプレクティック多様体の場合にあてはめたものは **ダルブー (Darboux) の定理** と呼ばれている．

10° ポアソン写像

M, N をポアソン多様体とし，$\{\ ,\ \}_M$，$\{\ ,\ \}_N$ をそれぞれ，M, N 上の括弧積とする．φ を M から N への写像とし，N 上の関数 f に対して，その引き戻し，φ^*f を $(\varphi^*f)(p)=f(\varphi(p))$ と定義する．φ^* が次の性質を持つとき，φ を **ポアソン写像** と呼ぶ：

（i） $\varphi^*C^\infty(N)\subset C^\infty(M)$，

（ii） $f, g\in C^\infty(N)$ のとき， $\varphi^*\{f, g\}_N=\{\varphi^*f, \varphi^*g\}_M$．

$\varphi^*(f\cdot g)=\varphi^*f\cdot\varphi^*g$ は φ^* の定義より自明だから，φ^* はポアソン環 $C^\infty(N)$ から，ポアソン環 $C^\infty(M)$ への準同形写像と述べても良いであろう．特に，$\varphi: M\to N$ が1対1, onto の写像であり，φ^{-1} もポアソン写像となるとき，φ を **ポアソン同形写像** と呼ぶ．M と N との間にポアソン同形写像が存在するとき，M と N は **ポアソン同形** であると呼ぶ．

ポアソン写像の概念は後に述べる力学系の簡約 (reduction) のときに特に重要なものだから，この節で局所的な性質を詳しく調べておこう．

M, N をポアソン多様体とし，次元を m, n とする．φ を M から N へのポアソン写像とし，$p\in M$ において，$(D\varphi)_p$ の階数は目一杯であるとする．$q=\varphi(p)$ とし，点 p，点 q の近傍で **9°** で述べた局所標準座標系を上手に選んで φ を簡単な形に表示することを考えよう．

（**a**） まず $m\leqq n$ の場合を考えよう．$\varphi_p^*: T_q^*N\to T_p^*M$ なる線形写像を，

$$\varphi_p^*(df)_q=d(\varphi^*f)_p$$

によって，定義する．これは φ を局所座標系で表示して

$$y^i=\varphi^i(x^1, \cdots, x^m) \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

としたとき，$\omega=\sum_{i=1}^n a_i(dy^i)_q$ に対して

$$\varphi_p{}^*\omega=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(p)\,(dx^j)_p$$

を対応させる写像で，微分写像 $(D\varphi)_p$: $T_pM\to T_qN$ の相対写像である．$\varphi_p{}^*$ の階数は $(D\varphi)_p$ のそれと同じで m であるから $\varphi_p{}^*$ は $T_q{}^*N$ から $T_p{}^*M$ の上への線形写像である．

点 $q\in N$ における局所標準座標系を

$$(x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s,z_1,\cdots,z_t)\qquad(2s+t=n)$$

とする．まず φ がポアソン写像ということより次がわかる．

補題 1 $\varphi_p{}^*$: $T_q{}^*N\to T_p{}^*M$ の核は $(dz_1)_q,\cdots,(dz_t)_q$ で張られる空間の線形部分空間である．

証明 $(df)_q\in\mathrm{Ker}\,\varphi_p{}^*$, つまり $\varphi_p{}^*(df)_q=0$ とすると，任意の $h\in C^\infty(N)$ に対して $\{\varphi^*h,\varphi^*f\}(p)=0$ となる．φ はポアソン写像だから，$\{\varphi^*h,\varphi^*f\}(p)=\{h,f\}(\varphi(p))=\{h,f\}(q)=0$. したがって $(df)_q$ は任意の $\omega\in T_q{}^*N$ に対して，$\{(df)_q,\omega\}_q=0$ をみたしている．それ故 $(df)_q$ は $(dz_1)_q,\cdots,(dz_t)_q$ で張られる空間の元である． □

上の補題により，$z_1,\cdots,z_t$ に適当な線形変換を行って，$z_1{}',\cdots,z_l{}',z_{l+1}{}',\cdots,z_t{}'$ として，$(dz_{l+1}{}')_q,\cdots,(dz_t{}')_q$ が $\mathrm{Ker}\,\varphi_p{}^*$ を張るようにできる．$(x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s,z_1{}',\cdots,z_l{}',z_{l+1}{}',\cdots,z_t{}')$ も q の所での局所標準座標系である．そこで，$p\in M$ の近くで

$$(\varphi^*x_1,\cdots,\varphi^*x_s,\varphi^*y_1,\cdots,\varphi^*y_s,\varphi^*z_1{}',\cdots,\varphi^*z_l{}')$$

を考えれば，$\varphi_p{}^*$ の核が除かれているので，

$$((d\varphi^*x_1)_p,\cdots,(d\varphi^*x_s)_p,(d\varphi^*y_1)_p,\cdots,\\(d\varphi^*y_s)_p,(d\varphi^*z_1{}')_p,\cdots,(d\varphi^*z_l{}')_p)$$

は1次独立で，かつ $T_p{}^*M$ を張っている．そこで，$\tilde{x}_i=\varphi^*x_i$, $\tilde{y}_i=\varphi^*y_i$, $\tilde{z}_\alpha=\varphi^*z_\alpha{}'$ $(1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq\alpha\leqq l)$ とおけば，逆写像定理により $(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_s,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_s,\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_l)$ は p の近傍での座標系となる．ところが，φ はポア

ソン写像だから，$p' \in M$ に対して

$$\{\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_j\}_M(p') = \varphi^*\{x_i,\ y_j\}_M(p') = \{x_i,\ y_j\}_N(\varphi(p')) = \delta_{ij}$$

等となり，$(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_s, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_s, \tilde{z}_1, \cdots \tilde{z}_l)$ 自身が p の所での局所標準座標系となっていることがわかる．

$$\begin{aligned}&(\tilde{x}_1(p'), \cdots, \tilde{x}_s(p'), \tilde{y}_1(p'), \cdots, \tilde{y}_s(p'), \tilde{z}_1(p'), \cdots, \tilde{z}_l(p'))\\ &\quad = (x_1(\varphi(p')), \cdots, x_s(\varphi(p')), y_1(\varphi(p')), \cdots,\\ &\qquad\qquad y_s(\varphi(p')), z_1'(\varphi(p')), \cdots, z_l'(\varphi(p')))\end{aligned}$$

つまり p' の座標は，$\varphi(p')$ の座標の後の $t-l$ 個を切り落しただけであることに注意すると次のことが得られる：

定理 1 $m \leqq n$ で $(D\varphi)_p$ の階数が m のときには，$\{\ ,\ \}_M(p)$ の階数と $\{\ ,\ \}_N(q)$ $(q = \varphi(p))$ の階数とが等しく，さらに p, q の所での局所標準座標系を上手にとって，それぞれ

$$x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s, z_1, \cdots, z_l \qquad (2s + l = m)$$

$$x_1', \cdots, x_s', y_1', \cdots, y_s', z_1', \cdots, z_t' \qquad (2s + t = n)$$

とすると，これによる φ の表示が次のような簡単な形になるようにできる：

$$x_i' = x_i, \quad y_i' = y_i \quad (1 \leqq i \leqq s), \qquad z_\alpha' = z_\alpha \quad (1 \leqq \alpha \leqq l).$$

(**b**) 次に $m > n$ の場合を考えよう．$(D\varphi)_p$ の階数は仮定により n であるから $(D\varphi)_p$ は T_pM から T_pN の上への写像となる．q の所での局所標準座標系を $(x_1', \cdots, x_s', y_1', \cdots, y_s', z_1', \cdots, z_t')$ とし，$x_i = \varphi^* x_i'$, $y_i = \varphi^* y_i'$, $z_\alpha = \varphi^* z_\alpha'$ とする．$(D\varphi)_p$ の相対写像 φ_p^*：$T_q^*N \to T_p^*M$ は 1 対 1 の写像となるから，$(dx_1)_p, \cdots, (dx_s)_p, (dy_1)_p, \cdots, (dy_s)_p, (dz_1)_p, \cdots, (dz_t)_p$ は T_p^*M の中で 1 次独立であり，したがって，$(d\xi_{n+1})_p, \cdots, (d\xi_m)_p$ を適当につけ加えて T_p^*M の基底を作ることができる．逆写像定理を使えば，

$$x_1, \cdots, x_s, \ y_1, \cdots, y_s, \ z_1, \cdots, z_t, \ \xi_{n+1}, \cdots, \xi_m$$

は p の近傍の座標系になっていることがわかる．

一方，φ はポアソン写像だから $\{x_i', y_j'\}_N = \delta_{ij}$ 等の関係から，

$$\{x_i,\ x_j\}_M=\{y_i,\ y_j\}_M=0,\qquad \{x_i,\ z_\alpha\}_M=\{y_i,\ z_\alpha\}_M=0$$

$$\{x_i,\ y_j\}_M=\delta_{ij},\qquad \{z_\alpha,\ z_\beta\}_M\,|\,\varphi^{-1}(q)=0$$

を得る．最後の式は部分集合 $\varphi^{-1}(q)$ （ q の逆像）の上で $\{z_\alpha,\ z_\beta\}_M$ が 0 となることを意味する．上の式より特に，

$$\begin{cases}\mathrm{ad}(x_i)=\dfrac{\partial}{\partial y_i}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m-n}a_i{}^k(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\xi})\dfrac{\partial}{\partial\xi_{n+k}}\\[2ex] \mathrm{ad}(y_i)=-\dfrac{\partial}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m-n}b_i{}^k(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\xi})\dfrac{\partial}{\partial\xi_{n+k}}\end{cases}\qquad(1\leqq i\leqq s)$$

等が得られ，$[\mathrm{ad}(f),\ \mathrm{ad}(g)]=\mathrm{ad}(\{f,\ g\})$ であることを使えば，

$$\mathrm{ad}(x_1),\quad\cdots,\quad\mathrm{ad}(x_s),\quad\mathrm{ad}(y_1),\quad\cdots,\quad\mathrm{ad}(y_s)$$

はどの 2 つのリー括弧積も 0 であることがわかる．

補題 2 $\tilde{\xi}_{n+1},\ \cdots,\ \tilde{\xi}_m$ を上手にとり，p の近傍では

$$(x_1,\ \cdots,\ x_s,\ y_1,\ \cdots,\ y_s,\ z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \tilde{\xi}_{n+1},\ \cdots,\ \tilde{\xi}_m)$$

が座標系となり，かつ

$$\{x_i,\ \tilde{\xi}_{n+j}\}_M=\{y_i,\ \tilde{\xi}_{n+j}\}_M=0\qquad(1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq m-n)$$

となるようにできる．

証明 8° で述べたフロベニウスの定理を $\mathrm{ad}(x_1),\ \cdots,\ \mathrm{ad}(x_s),\ \mathrm{ad}(y_1),\ \cdots,\ \mathrm{ad}(y_s)$ に対して使うのであるが，$\mathrm{ad}(x_i)$, $\mathrm{ad}(y_i)$ は $\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}$ 成分を含んでいないので，$\boldsymbol{z}=(z_1,\ \cdots,\ z_t)$ をパラメーターと考え，$\mathrm{ad}(x_i)$, $\mathrm{ad}(y_i)$ を $(x_1,\ \cdots,\ x_s,\ y_1,\ \cdots,\ y_s,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_m)$ 座標面に平行な面 E_z 上のベクトル場と考える．そうすると，パラメーター $\boldsymbol{z}$ に C^∞ 級に依存する E_z の座標系 $(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{m-t})$ をうまくとって

$$\mathrm{ad}(x_i)=\frac{\partial}{\partial\zeta_i},\qquad\mathrm{ad}(y_i)=\frac{\partial}{\partial\zeta_{s+i}}\qquad(1\leqq i\leqq s)$$

とすることができる．つまり，$\mathrm{ad}(x_i)$，$\mathrm{ad}(y_i)$ は平面

$$S_{z,c}=\{(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{2s},\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-n})\}\qquad\boldsymbol{c}=(c_1,\ \cdots,\ c_{m-n})$$

に接している．この平面はもとの座標系

$$(x_1,\ \cdots,\ x_s,\ y_1,\ \cdots,\ y_s,\ \xi_{n+1},\ \cdots,\ \xi_m)$$

で見れば，$\mathrm{ad}(x_i)$, $\mathrm{ad}(y_j)$ が $(x_1,\ \cdots,\ x_s,\ y_1,\ \cdots,\ y_s)$ 成分を必ず持っているという

ことから

$$S_{z,\boldsymbol{c}_*}=\{(x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s,\xi_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}),\cdots,\xi_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}))\}$$

の形に書ける．ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_s)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_s)$ である．ここで，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{c}$ を動かせば E_z 全体が得られることに注意し，$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_{m-n})$ をあらためて $(\tilde{\xi}_{n+1},\cdots,\tilde{\xi}_m)$ と書けば $(x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s,z_1,\cdots,z_t,\tilde{\xi}_{n+1},\cdots,\tilde{\xi}_m)$ が求める座標系である．なぜなら，$\mathrm{ad}(x_i)$，$\mathrm{ad}(y_j)$ 等のベクトル場の積分曲線に沿っては $\tilde{\xi}_{n+1},\cdots,\tilde{\xi}_m$ は一定だからである． □

上の補題により，$(z_1,\cdots,z_t,\tilde{\xi}_{n+1},\cdots,\tilde{\xi}_m)$ の任意の C^∞ 級関数 $f(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ について $\mathrm{ad}(f)=\{f,\ \}_M$ を考えると，これは $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 成分も $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ 成分も持たず，したがって，$\{f(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}}),\ g(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\}_M$ は再び $(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ の関数となることがわかる．したがって，$(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ 座標平面 E の原点の近傍は $\{\ ,\ \}_M$ によってポアソン多様体となる．そこで今度は $\tilde{\xi}_{n+1},\cdots,\tilde{\xi}_m$ をさらに変えて $\{z_\alpha,\tilde{\xi}_{n+j}\}_M$ を簡単な形にしたいのであるが，これは少し難しいので以下では次の仮定の下で考えることにする．

〈仮定 1〉 点 $q=\varphi(p)$ の近傍で $\{\ ,\ \}_N(q')$ の階数が一定.

〈仮定 2〉 M はシンプレクティック多様体.

仮定 1 の下では，**9**° の系により，$\{z_\alpha',z_\beta'\}_N=0$ だから，$\{z_\alpha,z_\beta\}_M=0$ となる．ところが仮定 2 によれば $\{\ ,\ \}_M(p)$ の階数は m であるから，$\mathrm{ad}(z_1)(p),\cdots,\mathrm{ad}(z_t)(p)$ は 1 次独立でなければならない．(線形代数の簡単な練習問題.) 一方，$\mathrm{ad}(z_\alpha)z_\beta=0$ だから，$\mathrm{ad}(z_\alpha)$ は $\dfrac{\partial}{\partial z_\beta}$ 成分を持たず，

$$\mathrm{ad}(z_\alpha)=\sum_{j=1}^{n-m}a_{\alpha j}(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\frac{\partial}{\partial\tilde{\xi}_{n+j}}$$

の形であり，

$$[\mathrm{ad}(z_\alpha),\ \mathrm{ad}(z_\beta)]=\mathrm{ad}(\{z_\alpha,z_\beta\}_M)=0$$

が成立する．そこで，E の原点 (すなわち p の所) の近傍で，**8**° で述べたフ

ロベニウスの定理を使えば，座標系

$$(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_t,\ \zeta_{t+1},\ \cdots,\ \zeta_{m-n})$$

で，原点の近傍では $\mathrm{ad}(z_i)=\dfrac{\partial}{\partial\zeta_i}$ $(1\leqq i\leqq t)$ となるものがとれることがわかる．この場合，$(z_1,\ \cdots,\ z_t)$ はパラメーターとして扱われていて変更を受けていないことに注意してほしい．上の座標関数は次の性質を持つことが容易にわかる：

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \{z_\alpha,\ z_\beta\}_M=0 \qquad \{z_\alpha,\ \zeta_\beta\}_M=\delta_{\alpha\beta} \qquad (1\leqq\alpha,\ \beta\leqq t), \\ \{z_\alpha,\ \zeta_{t+j}\}_M=0 \qquad (1\leqq\alpha\leqq t,\ 1\leqq j\leqq m-n-t). \end{cases}$$

$$(1\leqq\alpha,\ \beta\leqq t)$$

$\{\zeta_i,\ \zeta_j\}_M$ がどうなるかはこのままではわからないので，$\mathrm{ad}(\zeta_1)$ を調べてみると，上の性質と $\{\zeta_1,\ \zeta_1\}_M=0$ を使って

$$\mathrm{ad}(\zeta_1)=\frac{\partial}{\partial z_1}+\sum_{j=2}^{m-n}a_{1j}(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \zeta_{t+1},\ \cdots,\ \zeta_{m-n})\frac{\partial}{\partial\zeta_j}$$

の形であることがわかる．$(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_t)$ が入ってこないのは $[\mathrm{ad}(z_\alpha),\ \mathrm{ad}(\zeta_1)]=\mathrm{ad}\{z_\alpha,\ \zeta_1\}=0$ だからである．この係数 a_{1j} をもとにして次のような座標変換を行う：

$$(\beta)\quad \begin{cases} z_i'=z_i \qquad (1\leqq i\leqq t) \\ \zeta_1'=\zeta_1 \\ \zeta_j'=\zeta_j-\displaystyle\int_0^{z_1}a_{1j}(s,\ z_2,\ \cdots,\ z_t,\ \zeta_{t+1},\ \cdots,\ \zeta_{m-n})\,ds \end{cases}$$

$$(2\leqq j\leqq m-n).$$

こうすると，$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=(\zeta_{t+1},\ \cdots,\ \zeta_{m-n})$ として

$$\frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{\partial}{\partial z_1'}-\sum_{j=2}^{m-n}a_{1j}(\boldsymbol{z},\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}})\frac{\partial}{\partial\zeta_j'}, \qquad \frac{\partial}{\partial\zeta_i}=\frac{\partial}{\partial\zeta_i'} \qquad (1\leqq i\leqq t)$$

だから，$\boldsymbol{z}'=(z_1',\ \cdots,\ z_t')$，$\boldsymbol{\zeta}'=(\zeta_1',\ \cdots,\ \zeta_{m-n}')$ として

$$\begin{cases} \mathrm{ad}(\zeta_1{}') = \mathrm{ad}(\zeta_1) = \dfrac{\partial}{\partial z_1{}'} + \displaystyle\sum_{j=t+1}^{m-n} a_{1j}{}'(\boldsymbol{z}', \boldsymbol{\zeta}')\dfrac{\partial}{\partial \zeta_j{}'} \\ \mathrm{ad}(z_i{}') = \mathrm{ad}(z_i) = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_i{}'} \qquad (1 \leqq i \leqq t) \end{cases}$$

の形に書けることがわかる．したがって座標系 $(z_1{}', \cdots, z_t{}', \zeta_1{}', \cdots, \zeta_{m-n}{}')$ は，(α) で述べた等式（無論，$z_\alpha \to z_\alpha{}'$, $\zeta_j \to \zeta_j{}'$ におきかえた式）の他に，

$(\alpha.1)$ $\qquad \{\zeta_1{}', \zeta_i{}'\}_M = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq t)$

をみたしていることがわかる．

この $(z_1{}', \cdots, z_t{}', \zeta_1{}', \cdots, \zeta_{m-n}{}')$ に対して前と同じ考察を行えば $a_{1j}{}'(\boldsymbol{z}', \boldsymbol{\zeta}')$ が変数 $(\zeta_1{}', \cdots, \zeta_t{}')$ を含まぬこともわかる．そこで今度は $\{\zeta_2{}', \zeta_2{}'\}_M = 0$ を利用して

$$\mathrm{ad}(\zeta_2{}') = \frac{\partial}{\partial z_2{}'} + \sum_{j=3}^{m-n} a_{2j}{}'(z_1{}', \cdots, z_t{}', \zeta_{t+1}{}', \cdots, \zeta_{m-n}{}')\frac{\partial}{\partial \zeta_j{}'}$$

とおき，この係数をもとに (β) と同様の座標変換

$$\begin{cases} z_i{}'' = z_i{}' \quad (1 \leqq i \leqq t), \qquad \zeta_1{}'' = \zeta_1{}', \qquad \zeta_2{}'' = \zeta_2{}' \\ \zeta_j{}'' = \zeta_j{}' - \displaystyle\int_0^{z_2} a_{2j}{}'(z_1{}', s, z_2{}', \cdots, z_t{}', \zeta_{t+1}{}', \cdots, \zeta_{m-n}{}')\, ds \end{cases}$$

$$(3 \leqq j \leqq m-n)$$

を行えば，$(z_1{}'', \cdots, z_t{}'', \zeta_1{}'', \cdots, \zeta_{m-n}{}'')$ は (α)，$(\alpha.1)$ の性質だけでなく

$(\alpha.2)$ $\qquad \{\zeta_2{}'', \zeta_i{}''\}_M = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq t)$

も持つことがわかる．この論法を繰返して次が得られる．

補題 3 仮定 1, 2 の下で，$(x_1{}', \cdots, x_s{}', y_1{}', \cdots, y_s{}', z_1{}', \cdots, z_t{}')$ を点 q の所での局所標準座標系とする．$\varphi: M \to N$ をポアソン写像とし，$\varphi(p) = q$ とする．このとき $x_i = \varphi^* x_i{}'$, $y_i = \varphi^* y_i{}'$, $z_\alpha = \varphi^* z_\alpha{}'$ とおけば p の近傍の座標系としては関数を付加えて

$$(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s, z_1, \cdots, z_t, \zeta_1, \cdots, \zeta_t, \eta_1, \cdots, \eta_l)$$

$$(2s + 2t + l = m)$$

の形で選べ，しかもこれらは φ がポアソン写像であることから自然に持って

いる性質に加えて,

$$\{z_i,\ \zeta_j\}_M=\delta_{ij},\qquad \{\zeta_i,\ \zeta_j\}_M=0\qquad (1\leqq i,\ j\leqq t),$$
$$\{z_i,\ \eta_j\}_M=0\quad (1\leqq i\leqq t,\ 1\leqq j\leqq l)$$

をみたすようにできる.

上の補題で得られた座標系を使うと, 容易に

$$(*)\qquad \mathrm{ad}(\zeta_i)=\frac{\partial}{\partial z_i}+\sum_{j=1}^{l}a_{ij}(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial \eta_j}\qquad (1\leqq i\leqq t)$$

の形であることがわかる. つまり, $\mathrm{ad}(\zeta_i)$ は $(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_l)$ 平面上のベクトル場であるが, $[\mathrm{ad}(\zeta_i),\ \mathrm{ad}(\zeta_j)]=0$ であるからフロベニウスの定理により, 原点の近傍の座標系 $(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_{t+l})$ で,

$$\mathrm{ad}(\zeta_i)=\frac{\partial}{\partial \sigma_i}\qquad (1\leqq i\leqq t)$$

となるものがある. つまり, $\mathrm{ad}(\zeta_i)$, $1\leqq i\leqq t$, はこの座標系に関する平面

$$S_{\boldsymbol{c}}=\{(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_t,\ c_1,\ \cdots,\ c_l)\}\qquad \boldsymbol{c}=(c_1,\ \cdots,\ c_l)$$

に接している. この $S_{\boldsymbol{c}}$ をもとの座標系で見れば,

$$S_{\boldsymbol{c}}=\{(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ f_1(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{c}),\ \cdots,\ f_l(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{c}))\},$$

つまり, $\eta_i=f_i(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{c})$ の形で与えられることが $(*)$ 式の形からわかる. $\boldsymbol{c}$ を動かせば $S_{\boldsymbol{c}}$ は原点の近傍を覆うから, $\boldsymbol{c}=(c_1,\ \cdots,\ c_l)$ をあらためて $(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_l)$ と書き, $(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_l)$ を $(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_l)$ に代る座標系だと思い, 座標系

$$(z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_t,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_l)$$

を考えれば, $\mathrm{ad}(\zeta_i)$ の積分曲線に沿って ξ_j は一定だから $\{\zeta_i,\ \xi_j\}_M=0$ が得られる. $\{z_i,\ z_j\}_M=0$, $\{z_i,\ \eta_j\}_M=0$ だったから ξ_j が $(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\eta})$ の C^∞ 級関数であることを使うと, $\{z_i,\ \xi_j\}_M=0$ も得られる. したがって, $\{z_i,\ \xi_j\}_M=\{\zeta_i,\ \xi_j\}_M=0$ が成立する.

以上によって, 座標系

$$(x_1,\ \cdots,\ x_s,\ y_1,\ \cdots,\ y_s,\ z_1,\ \cdots,\ z_t,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_t,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_l)$$

においては，$(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ 平面は $\{\ ,\ \}_M$ に関してシンプレクティック多様体になっていることがわかる．これに対して **9°** の定理をあてはめて，$(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ の部分を局所標準座標系におきかえると最終的な形になる．これをまとめて次の定理を得る．

定理 2 M をシンプレクティック多様体，N をポアソン多様体とし，$\dim M \geqq \dim N$ とする．φ: $M \to N$ をポアソン写像とし，M の1点 p に対し，$q = \varphi(p)$ とし，$\{\ ,\ \}_N(q')$ の階数は q の近傍上で一定であるとする．さらに，$(D\varphi)_p$ の階数は目一杯であるとする．

このとき，q の所での局所標準座標系

$$(x_1', \cdots, x_s', y_1', \cdots, y_s', z_1', \cdots, z_t')$$

に対して，$x_i = \varphi^* x_i'$，$y_i = \varphi^* y_i'$，$z_j = \varphi^* z_j'$ とおき，p の所での局所標準座標系を

$$(x_1, \cdots, x_s, z_1, \cdots, z_t, \tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_u, y_1, \cdots, y_s, \zeta_1, \cdots, \zeta_t, \tilde{\eta}_1 \cdots, \tilde{\eta}_u)$$

の形に（つまり，$(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s, z_1, \cdots, z_t)$ に関数を付加える形で）とることができる．

11° モーメント写像

ポアソン写像の最も重要な例はこの節で述べるモーメント写像である．

M をシンプレクティック多様体とし，$f_1, \cdots, f_N$ を $C^\infty(M)$ の元とする．これは，何かの“積分”として与えられることが多いが今はそれを問題にしない．さらに，$f_1, \cdots, f_N$ は1次独立で，$\{\ ,\ \}_M$ に関して閉じているものとしよう．つまり，

$$\{f_i, f_j\}_M = \sum_{k=1}^{N} c_{ij}^k f_k, \qquad c_{ij}^k \in \boldsymbol{R}$$

と書けるとする．1次独立性から $c_{i}{}^{k}{}_{j}$ は一意的に定まる．このことは，$f_1, \cdots, f_N$ の1次結合の全体 $\mathfrak{g}$ がリー環をなすと言っても同じである．

$P(\mathfrak{g})$ を $f_1, \cdots, f_N$ から生成されるポアソン環とする．$P(\mathfrak{g})$ は $C^\infty(M)$ の中のポアソン部分環であるが，これを M とは関係のないポアソン多様体上の関数と見る見方がモーメント写像の最も面白い部分である．

まず，$f_1, \cdots, f_N$ を $C^\infty(M)$ の元と思わずに，抽象的な N 次元ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の基底と思う．こう思えばこの抽象的ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ にリー環としての構造（つまり，[,]-積）が $[f_i, f_j] = \sum c_{i}{}^{k}{}_{j} f_k$ で与えられたと思って良い．そこで，$\mathfrak{g}$ の相対空間 $\mathfrak{g}^*$ を考え，これを現実の空間 $\boldsymbol{R}^N$ と考えてしまう．$\mathfrak{g}$ の元 h は $\mathfrak{g}^*$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像であるから，h を $\boldsymbol{R}^N$ 上の斉1次関数だと考えることができる．

さて，任意の $p \in M$ に対して，$C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 δ_p を

（1）　$$\delta_p(g) = g(p), \qquad g \in C^\infty(M)$$

と定義する．δ_p は，1点 p を台とする δ（**デルタ**）**関数**と呼ばれる．g を $\mathfrak{g}$ の元に制限して δ_p を考えたものを $\delta_p|\mathfrak{g}$ とすれば，これは $\mathfrak{g}$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像であるから，$\delta_p|\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}^*$ と考えられる．

定義1　$p \mapsto \delta_p|\mathfrak{g}$ を**モーメント写像**と呼ぶ．これは M から $\mathfrak{g}^*$ への写像である．$\mu(p) = \delta_p|\mathfrak{g}$ と書くこともある．

この節では，$\mathfrak{g}^*$ がポアソン多様体であり，$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ がポアソン写像となることなどを証明しよう．

まず，雰囲気が出るように，以下では f_i を ξ_i と書き，$\boldsymbol{R}^N = \mathfrak{g}^*$ 上の1次関数と思うことにする．つまり $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ を $\boldsymbol{R}^N$ の座標関数と考え，ここに，

（2）　$$\{\xi_i, \xi_j\} = \sum_{k=1}^{N} c_{i}{}^{k}{}_{j} \xi_k$$

なる関係でリー環の構造が入っているものとする．**7°** の式を参考にして，$f = f(\xi_1, \cdots, \xi_N)$，$g = g(\xi_1, \cdots, \xi_N) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して

$$(3) \qquad \{f,\ g\}_{\mathfrak{g}^*} = \sum_{i,j=1}^{N} \{\xi_i,\ \xi_j\} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} = \sum_{i,j,k=1}^{N} c_{i\ j}^{\ k} \xi_k \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

と定義すれば，これによって $\mathfrak{g}^*$ がポアソン多様体となることが計算だけで確かめられる．

定理 1 モーメント写像 $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ はポアソン写像である．

証明 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の関数と思ってきたが，これはもともと M 上の関数だったから，$f = f(\xi_1, \cdots, \xi_N) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して，$p \in M$ の所で $f(\xi_1(p), \cdots, \xi_N(p))$ を考えてみよう．$\xi_i \in \mathfrak{g}$ だったから，$\xi_i(p) = \delta_p(\xi_i) = \xi_i(\mu(p))$ ($= \langle \mu(p), \xi_i \rangle$ とも書く) に注意してやると，

$$(4) \quad (\mu^* f)(p) = f(\xi_1(\mu(p)), \cdots, \xi_N(\mu(p))) = f(\xi_1(p), \cdots, \xi_N(p))$$

つまり，$\mu^* f$ は，$\xi_1, \cdots, \xi_N$ なる M 上の関数と，$f(X_1, \cdots, X_N)$ なる N 変数の関数との合成関数と考えられる．したがって，

$$\mu^*(f+g) = \mu^* f + \mu^* g, \qquad \mu^*(f \cdot g) = \mu^* f \cdot \mu^* g$$

である．$\{\mu^* f,\ \mu^* g\}_M$ を計算するために，M 上に局所標準座標系 $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m)$ をとって計算すれば

$$(5) \qquad \{\mu^* f,\ \mu^* g\}_M = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial \mu^* f}{\partial x_i} \frac{\partial \mu^* g}{\partial y_i} - \frac{\partial \mu^* f}{\partial y_i} \frac{\partial \mu^* g}{\partial x_i} \right\}$$

これを合成関数の偏微分規則を使って計算すると，

$$(6) \quad \{\mu^* f,\ \mu^* g\}_M = \sum_{k,l=1}^{N} \{\xi_k,\ \xi_l\}_M(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_k}(\mu(p)) \cdot \frac{\partial g}{\partial \xi_l}(\mu(p))$$

を得るが，$\{\xi_k,\ \xi_l\}_M(p) = \langle \mu(p),\ \{\xi_k,\ \xi_l\}_M \rangle$ に注意すると，

$$(7) \qquad \{\mu^* f,\ \mu^* g\}_M = \mu^* \{f,\ g\}_{\mathfrak{g}^*}$$

が得られる． □

$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ の像がどのようなものかを述べるために言葉の定義を少しやっておこう．

定義 2 n 次元多様体 N の部分集合 S が **部分多様体** であるとは，任意の S の点 σ に対して，N の中での σ の近傍 V_σ と，V_σ 上の座標系 $(x_1, \cdots, x_r,$

$x_{r+1}, \cdots, x_n$) が存在して，

$$V_\sigma = \{ (x_1, \cdots, x_n) ; |x_i| < 1, \ 1 \leqq i \leqq n \}$$

$$V_\sigma \cap S = \{ (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0) ; |x_i| < 1, \ 1 \leqq i \leqq r \}$$

となる場合を言う．

定理2 φ を多様体 M から N への C^∞ 級写像とする．φ の微分写像 $(D\varphi)_{p'}$: $T_{p'}M \to T_{\varphi(p')}N$ の階数が p の近傍 V_p 上で一定($= r$)ならば，V_p に含まれる p の開近傍 V_p' があって，$\varphi(V_p')$ は N の（ r 次元の）部分多様体である．

証明 点 p において，$(D\varphi)_p$: $T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ を考え，この線形写像の核を $\mathrm{Ker}(D\varphi)_p$ とし，その補空間を E_p とする．

$$T_pM = E_p \oplus \mathrm{Ker}(D\varphi)_p \qquad (\text{直和})$$

である．p の連結開近傍 W_p と，その上の p を原点とする座標系 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$ を，$\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_r}\right|_p$ が E_p の基底，$\left.\dfrac{\partial}{\partial x_{r+1}}\right|_p, \cdots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ が $\mathrm{Ker}(D\varphi)_p$ の基底となるようにとる．W_p 内で $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$ で定義される平面を $W_p{}^r$ とすればこれは M の部分多様体で，φ を $W_p{}^r$ に制限した写像 $\varphi | W_p{}^r$: $W_p{}^r \to N$ については $(D\varphi | W_p{}^r)_p = (D\varphi)_p | T_p W_p{}^r$ だから階数は r（目一杯）となる．したがって，初めから，W_p を十分小さくとっておくものとすれば $D\varphi | W_p{}^r$ の階数は $W_p{}^r$ の各点で r だとして良い．

陰関数定理を使うと $q = \varphi(p)$ の近傍の座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ を上手にとると次が成立するようにできる：

$$\varphi^* y_i = x_i \quad (1 \leqq i \leqq r), \qquad \varphi^* y_j = 0 \quad (r+1 \leqq j \leqq n)$$

そこで，$\pi(y_1, \cdots, y_n) = (y_1, \cdots, y_r)$ という射影を考え，$\pi\varphi$ を W_p に制限した写像 $\pi\varphi | W_p = \tilde{\varphi}_\pi$ を考えると，この写像に対しても陰関数定理が使えて，p の近傍 $\widetilde{W}_p$ （$\subset W_p$）上の座標系 $(z_1, \cdots, z_m)$ を上手にとると，$\tilde{\varphi}^* y_i = z_i$（$1 \leqq i \leqq r$）が成立するようにできる．つまり，$(z_1, \cdots, z_r) = (x_1, \cdots, x_r)$ として良く，これらの局所座標系による $\tilde{\varphi}_\pi$ の表示では，$\tilde{\varphi}_\pi$ は，点 $p' = (x_1(p'), \cdots, x_r(p'), z_{r+1}(p'), \cdots, z_m(p'))$ を，点 $\tilde{\varphi}_\pi(p') = (y_1(\tilde{\varphi}_\pi(p')), \cdots, y_1(\tilde{\varphi}_\pi(p')))$ に写すだけのものとな

る．$\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)$ が N の部分多様体であることは明らかだから，$\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)=\varphi(\widetilde{W}_p)$ を示せば良い．

$\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)\subset\varphi(\widetilde{W}_p)$ は明らかだから，$\varphi(p')\notin\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)$，$p'\in\widetilde{W}_p$ として矛盾を導く．p' の座標を $(x_1(p'),\cdots,x_r(p'),x_{r+1}(p'),\cdots,z_m(p'))$ とすれば，$\varphi(p')\notin\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)$ だから，$(z_{r+1}(p'),\cdots,z_m(p'))\neq(0,\cdots,0)$ である．$p''\in\widetilde{W}_p$ を座標が $(x_1(p'),\cdots,x_r(p'),0,\cdots,0)$ であるような点とすれば $\varphi(p'')=\pi\varphi(p'')\in\tilde{\varphi}_\pi(\widetilde{W}_p)$ である．p'' と p' とを座標系内の直線 $p_t=(x_1(p'),\cdots,x_r(p'),tz_{r+1}(p'),\cdots,tz_m(p'))$ で結び，点 p_t における接ベクトル $\dot{p}_t$ を考えると，$\tilde{\varphi}_\pi$ の表示より，$(D\tilde{\varphi}_\pi)_{p_t}\dot{p}_t=0$ である．ところが，$(D\tilde{\varphi}_\pi)_{p_t}=\pi(D\varphi)_{p_t}$ だから，

$$\mathrm{Ker}(D\tilde{\varphi}_\pi)_{p_t}\supset\mathrm{Ker}(D\varphi)_{p_t}\qquad(0\leqq t\leqq 1)$$

であり，次元はどちらも r だから，$\mathrm{Ker}(D\tilde{\varphi}_\pi)_{p_t}=\mathrm{Ker}(D\varphi)_{p_t}$ が成立する．つまり，$(D\varphi)_{p_t}\dot{p}_t$ も 0 となる．微分写像は

$$(D\varphi)_{p_t}\dot{p}_t=\frac{d}{dt}\varphi(p_t)\qquad(\text{図 9 参照})$$

によって定義される写像であるから，$\dfrac{d}{dt}\varphi(p_t)=0$．したがって，$\varphi(p')=\varphi(p'')$ となり，$\varphi(p')\notin\tilde{\varphi}_\pi(W_p)$ に矛盾する． □

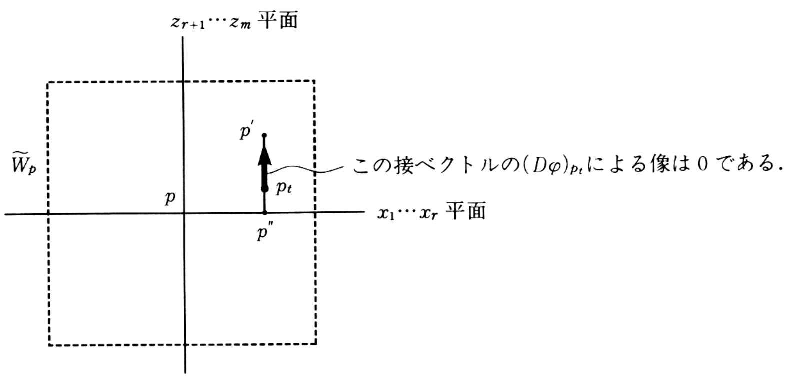


図 9

さて話をモーメント写像 μ: $M\to\mathfrak{g}^*$ に戻そう．前定理により，$p\in M$ の近傍で μ の微分写像 $(D\mu)_{p'}$: $T_{p'}M\to T_{\mu(p)}\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}^*$ の階数が一定ならば p

の近傍 V_p で，$\mu(V_p)$ が $\mathfrak{g}^*$ の部分多様体となるものが存在する．しかも，上の証明からわかるように，$\mu(V_p)$ は $\mu(p)$ の近傍 $U_{\mu(p)}$ に上手に導入した座標系の座標平面になっているようにとれる．つまり，$U_{\mu(p)}$ 上に座標系 $y_1, \cdots, y_N$ を上手にとれば，$\mu(V_p)$ は $y_{r+1} = \cdots = y_N = 0$ で表される集合となる．

V_p, $U_{\mu(p)}$ はそれぞれシンプレクティック多様体, ポアソン多様体であるから，μ を V_p から $U_{\mu(p)}$ へのポアソン写像と思うことができる．以下では μ は V_p から $U_{\mu(p)}$ への写像と考える．

μ^*: $C^\infty(U_{\mu(p)}) \to C^\infty(V_p)$ はポアソン準同形写像となるが，この核 $\mathrm{Ker}\,\mu^*$ は $\mu(V_p)$ 上で 0 となる関数の全体, つまり，$(y_1, \cdots, y_N)$ の関数として $f(y_1, \cdots, y_N)$ と書いたときに

$$f(y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0) = 0$$

となる $U_{\mu(p)}$ 上の C^∞ 級関数の全体である．特に，$y_{r+1}, \cdots, y_N \in \mathrm{Ker}\,\mu^*$ である．$\mathrm{Ker}\,\mu^*$ はポアソン環としてのイデアル，つまり次の性質をみたす $C^\infty(U_{\mu(p)})$ のポアソン部分環になっている：

(＊) $f \in C^\infty(U_{\mu(p)})$, $g \in \mathrm{Ker}\,\mu^*$ ならば，fg, $\{f, g\} \in \mathrm{Ker}\,\mu^*$

この性質により，任意の $f \in C^\infty(U_{\mu(p)})$ に対して $\mathrm{ad}(f)$ は $\mu(V_p)$ 上では $\partial/\partial y_{r+1}, \cdots, \partial/\partial y_N$ 成分を持たないベクトル場でなければならないことがわかる．つまり，$\mathrm{ad}(f)$ は $\mu(V_p)$ に接しているのである．特にポアソン多様体 $U_{\mu(p)}$ の階数は各点で r 以下である．次の補題は容易であろう：

補題 $C^\infty(U_{\mu(p)})/\mathrm{Ker}\,\mu^*$ には自然にポアソン環の構造が入り，しかもこれは，$C^\infty(U^r_{\mu(p)})$ と同一視される．ただし，$U^r_{\mu(p)}$ は $U_{\mu(p)}$ において $y_{r+1} = \cdots = y_N = 0$ として得られる座標平面である．

上の同一視を行うには，$f(y_1, \cdots, y_N) - f(y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{Ker}\,\mu^*$ だから，代表元として $f(y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0)$ の形のものがとれることに注意すれば良い．$U^r_{\mu(p)}$ は $C^\infty(U_{\mu(p)})/\mathrm{Ker}\,\mu^*$ から持込んだポアソン積（実は $C^\infty(U_{\mu(p)})$ のものを制限しただけ）によってポアソン多様体となる．しかも，

μ: $V_p \to U^r_{\mu(p)}$ はポアソン写像であり，作り方から，$(D\mu)_{p'}$: $T_{p'}V_p \to T_{\mu(p')}U^r_{\mu(p)}$ の階数は目一杯（full）であることがわかる．したがって，これに対して前節の定理が使えて，μ が局所的にはどのように書けているかがわかるが，あらためて書くまでもあるまい．

しかし，これらの結論はいずれも局所的なものなので次の章でリー変換群の考えを使ってもう少し広い場所での μ の性質を調べることにしよう．

第3章　リー群とその作用

群の概念は我々が外界の対象に対して行う働きかけとか操作といったものに密着しているもので，「打ち消し」のきく操作のようなものは全体として群をなす．対象に対して何かの動きかけを行って，その応答を見ることから我々の外界に対する認識が始まる．働きかけとその応答の組が，対象の持っている性質であると理解される．

操作というとそれを行う人間の意志が強く感じられるが，これも動きかけの一種である．対象に対してある操作を行っても対象が何の変化も起さない（何も応答しない）とき，その対象はこの操作に関して対称であると言い，こういう操作の全体を（その対象が持つ）対称性の群と呼ぶ．

この章ではリー群，リー変換群について解説するが，多くの場合，行列群に関する知識だけでまにあってしまうので，細かい部分は証明を省略してある．

1°　リー群の定義と基礎的性質

位相群 G が，これを位相空間と見たときに有限次元の C^0 級多様体になっている場合，G を**リー**（Lie）**群**と呼ぶ．

リー群は，定義においては C^0 級多様体でしかないのだが，実は必ず C^∞ 級多様体になり，かつ群演算の写像

$$\alpha : G \times G \to G, \quad \alpha(g, h) = g \cdot h, \quad \beta : G \to G, \quad \beta(g) = g^{-1}$$

が C^∞ 級写像となることが知られている（Hilbert の第 5 問題）．したがって，以下では群であり，同時に C^∞ 級多様体であり，群演算が C^∞ 級であるものをリー群と呼ぶことにする．

例 1　$GL(n)$ を正則な n 次正方行列全体とすると，$GL(n)$ は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の開集合だから C^∞ 級多様体であり，行列の積によって演算を定義すれば，上の α, β は共に C^∞ 級の写像となる．したがって，$GL(n)$ はリー群である．

以下，有限次元のリー群の性質を使いやすい形にまとめておこう．

〈G.1〉　G がリー群ならばその閉部分群（閉集合かつ部分群）もリー群である．

〈G.2〉　G がリー群，N が G の正規閉部分群（正規部分群かつ閉部分群）ならば，商群 G/N もリー群である．

〈G.3〉　G, H がリー群のとき，G から H への連続な準同形写像は必ず C^∞ 級の写像となる．

上の性質はリー群なるものがどのようなものかを述べているのであって，具体的な計算には役に立たないが，リー群がたくさんあることなどを教えてくれる．

例 2　$SL(n) = \{ X \in GL(n) ; \det X = 1 \}$,

$O(n) = \{ X \in GL(n) ; {}^tXX = E \}$

などは $GL(n)$ の閉部分群だからリー群である．

リー群の他の性質を述べるにはもう少し言葉を用意しなければならない．まず，$g \in G$ に対して $L_g : G \to G$，$R_g : G \to G$ なる写像を

$$L_g(h) = gh, \qquad R_g(h) = hg$$

で定義し，これを g による **左変換**，**右変換** と呼ぶ．群演算が C^∞ 級だから，

L_g, R_g は G から G の上への C^∞ 級同相写像となる. $A_g(h)=L_gR_{g^{-1}}(h)$ とすれば A_g も C^∞ 級であるが, これは G から G の上への準同形写像にもなっており, $A_gA_h=A_{gh}$ も成立する.

$\mathfrak{g}$ を G の単位元 e の接空間とする. 任意の $g\in G$ に対して, R_g の微分写像 $(DR_g)_e$ は $\mathfrak{g}=T_eG$ から T_gG への線形同形写像であるが, $X\in\mathfrak{g}$ を固定して $g\in G$ を動かすと, $(dR_g)_eX$ は G 上の C^∞ 級のベクトル場となる. これを $\widetilde{X}$ と書き, **右不変ベクトル場** と呼ぶ. $\widetilde{X}$ は G 上の完備ベクトル場となり, したがって特に, e を通る $\widetilde{X}$ の積分曲線が $-\infty<t<\infty$ の範囲で定義される. これを $\exp tX$ と書く(図1). $t=1$ とおき, exp を $\mathfrak{g}$ から G への写像と考えたとき, これを **指数写像** (exponential mapping) と呼ぶ.

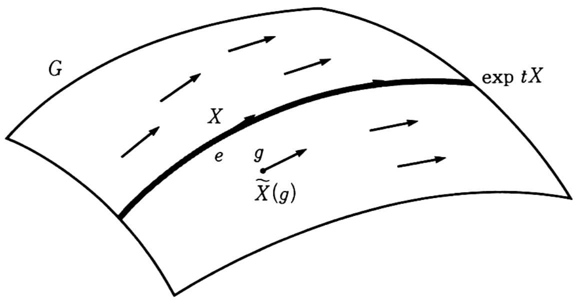


図 1 $\widetilde{X}$ とその積分曲線

例 3 $GL(n)$ の単位元における接空間は n 次正方行列全体 $M(n)$ である. $X\in M(n)$ に対して, 右不変ベクトル場 $\widetilde{X}$ は

$$\widetilde{X}(g)=X\cdot g, \qquad g\in GL(n)$$

で与えられる. これの積分曲線は微分方程式

$$\frac{d}{dt}g(t)=X\cdot g(t)$$

の解だから, $g(0)=e$ をみたすものは,

$$\exp tX=e^{tX}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n\,!}X^n$$

で与えられる.

〈G.4〉 上で定義された指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ について,

（a） $\exp(s+t)X = \exp sX \cdot \exp tX$ （特に $\exp \boldsymbol{R}X$ は部分群）.

（b） $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は C^∞ 級で, $\exp 0 = e$ であり, $(D\exp)_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は恒等写像となる.

（b）で述べた事と逆写像定理を組合わせると, 指数写像は $\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の e の近傍への C^∞ 同相写像となっていることがわかるので, このことを利用して G に局所座標系を入れることもできる.

例 4 $O(n)$ は $\{X \in M(n) ; {}^tXX = E(\text{単位元})\}$ とも書ける. 陰関数定理を写像 $X \mapsto {}^tXX$（対称行列）に対して用いれば, E における $O(n)$ の接空間 $\mathfrak{g} = T_E O(n)$ は,

$$\{X \in M(n) ; {}^tX + X = O\} \qquad (\text{歪対称行列全体})$$

で与えられることがわかる. 指数写像は $\exp X = e^X$ で与えられ, これで E の近傍が覆われる.

〈G.5〉 G 内の C^1 級曲線 $c(t)$ で $c(0) = e$ となるものに対して, X を $t=0$ における c の接ベクトルとする. このとき次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty} c\left(\frac{t}{n}\right)^n = \exp tX \qquad (\text{微分もこめて, 広義一様}).$$

上の式は群の演算を積の形で書いてあるが, これを少々乱暴だが和の形に書いて,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n}\left\{c\left(\frac{t}{n}\right) - c(0)\right\}$$

として見ると意味がはっきりする. $\exp \boldsymbol{R}X$ は群 G の世界での“直線”のような役割を負っているのである.

さて, $A_g : G \to G$ は単位元 e を動かさないから, 微分写像 $(DA_g)_e$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ の上への線形写像である. これを $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ と書く. $\mathrm{Ad}(g)$ は次のように定義しても良い.

$$\mathrm{Ad}(g)X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A_g(\exp tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\cdot\exp tX\cdot g^{-1}$$

〈G.6〉 $[X,\ Y] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tY)X$ と定義すると，[,] は $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線形写像であり，これによって $\mathfrak{g}$ はリー環となる．つまり，次の式が成立する：

(a) $[X,\ Y] = -[Y,\ X]$

(b) $[X,\ [Y,\ Z]] + [Y,\ [Z,\ X]] + [Z,\ [X,\ Y]] = O$

（ヤコビの恒等式）

リー群 G においては，単位元の接空間 $\mathfrak{g}$ に上で述べたようにしてリー環の構造が入るのであるが，これを，G **に付属するリー環** と呼ぶ．

例 5　$G = GL(n)$ のとき，$\mathfrak{g} = M(n)$ に入るリー環の構造は，

$$[X,\ Y] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(e^{tX})Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}\cdot Y\cdot e^{-tX} = XY - YX$$

で与えられる．ただし XY は行列の積である．

〈G.7〉 $\mathrm{ad}(X) = [X,\ Y]$ とし，$\mathrm{ad}(X)$ を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像と考えると，次が成立する：

$$e^{t\,\mathrm{ad}(X)}Y = \mathrm{Ad}(\exp tX)Y.$$

上の等式は両者が同じ常微分方程式をみたしていることと，解の一意性を使うだけで得られる．

ところで，〈G.6〉で，G に付属するリー環という概念を定義したのであるが，実は次のことがわかっている．

〈G.8〉 $\mathfrak{g}$ を（抽象的な）有限次元のリー環とする．$\mathfrak{g}$ は必ず，あるリー群に付属するリー環になっている．これをリーの**第 3 主定理**と呼ぶ．

〈G.6〉，〈G.8〉によってリー群とリー環は密接につながっていることがわ

かるのだが，もっと詳細に調べるときには以下に述べるような性質が役に立つ．

まず実数全体 $\boldsymbol{R}$ は1次元のリー群（群演算は加法）である．さらに $S^1=\{e^{i\theta};\ \theta\in\boldsymbol{R}\}$ も1次元のリー群である．リー環はどちらに付属するものも $\boldsymbol{R}$ であってリー環だけ見ていたのでは群の違いは識別されない．〈G.6〉での $[\ ,\ ]$ 積の定義のしかたを見ればわかるように，G に付属するリー環 $\mathfrak{g}$ は G の単位元 e の近傍だけ見ていれば決定できてしまうのだから遠くの性質は反映しないのである．$\mathfrak{g}$ をリー環とすると，$\mathfrak{g}$ を付属させるようなリー群 G は一般にはたくさんある．しかし，次のことが成立する：

〈G.9〉 リー環 $\mathfrak{g}$ を付属させるリー群の中に，位相空間として単連結なリー群 $\tilde{G}$ が存在する．さらに，リー群 G が $\mathfrak{g}$ をリー環に持つ（つまり，$\mathfrak{g}$ は G に付属するリー環になっている）ならば，$\tilde{G}$ から G への C^∞ 級準同形写像 φ で $(D\varphi)_e$：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が恒等写像となるものがある．

逆写像定理と組合わせると，上の φ：$\tilde{G}\to G$ は単位元の近くでは1対1の写像にもなっていることがわかるから，リー環 $\mathfrak{g}$ は，それを付属させるリー群の局所的性質（単位元の近傍での演算の性質）を完全に決定していると言って良い．

次にリー環の準同形写像について述べよう．$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をリー環とし，$\dot{\varphi}$：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ を線形写像とする．$\dot{\varphi}$ が

$$\dot{\varphi}([X,\ Y])=[\,\dot{\varphi}(X),\ \dot{\varphi}(Y)]$$

をみたすとき，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ への **準同形写像** と呼ぶ．

〈G.10〉 $\tilde{G}$ を単連結なリー群，H をリー群とし，これらのリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする．$\dot{\varphi}$：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ をリー環の準同形写像とするとき，この $\dot{\varphi}$ に対して，$\tilde{G}$ から H への C^∞ 級準同形写像 φ で，$(D\varphi)_e=\dot{\varphi}$ となるものがただ1つ存在する．

リー群の良い所はこのように，付属するリー環を調べるだけでほとんどの性質がわかることであるが，さらに多様体の実例をたくさん作り出すという利点も持っている．

G をリー群，H を G の閉部分群とする．このとき，G に同値関係 $\sim$ を次のようにして導入する： $g_1, g_2 \in G$ が同値，$g_1 \sim g_2$ であるとは $g_1 g_2^{-1} \in H$ となる場合を言う．$\sim$ が同値関係であることは容易に確かめられる．このときこの同値関係による同値類全体の集合（1つの同値類を1つの元と見なしてできる集合）を G/H と書き，G を H で割った **商空間** と呼ぶ．このとき次が成立する：

〈G.11〉　G/H は C^∞ 級多様体である．

例6　$O(n-1)$ を $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & O(n-1) \end{array}\right]$ の形で $O(n)$ の閉部分群と見なせば $O(n)/O(n-1)$ は結局 $O(n)$ の元の第1列目の列ベクトル全体だから，$O(n)/O(n-1) = S^{n-1}$（$n-1$ 次元球面）である．

我々が良く知っている多様体の例はほとんど G/H の形で作られている．

2° リー変換群

リー群というものは，単独で存在しているという情況は普通は起らないで，何か別の対象があって，それの対称性を記述しようとするときに登場することが多い．対象に対してある働きかけを行ってみて，それに対する反応を観察し，それが全く変化しないか，または極めて単純なルールで反応するとき，我々はその対象物が対称性を持っていると認識するのであるから，その働きかけの方を数学的に表現することで，対称性そのものを表現しようとするのである．

定義 リー群 G が C^∞ 級多様体 M に C^∞ 級に **作用して** いるとは, $G \times M$ から M への C^∞ 級写像 ρ で次の性質を持つものがある場合を言い, このときの ρ を, G の M への **作用** と呼ぶ:

(i) $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x) \qquad (g, h \in G,\ x \in M)$.

(ii) $\rho(e, x) = x \qquad$ (e は G の単位元).

$\rho_g(x) = \rho(g, x)$ と書けば (i), (ii) は $\rho_g\rho_h = \rho_{gh}$, $\rho_e = 1$ (恒等写像) を意味する. 特に $\rho_{g^{-1}}\rho_g = 1$ だから ρ_g は M から M の上への C^∞ 級同相写像となる. $\mathcal{D}(M)$ を M から M の上への C^∞ 級同相写像の全体とすれば, これは写像の合成を演算として群をなす. そこで $\rho(g)(x) = \rho(g, x)$ と書いて, ρ を G から $\mathcal{D}(M)$ への写像と考えれば, ρ は準同形写像となる. $\rho: G \to \mathcal{D}(M)$ が1対1写像 (つまり $\mathrm{Ker}\,\rho = \{e\}$) のとき, G の作用 ρ は **忠実** (faithfull) であると呼ぶ.

例 G をリー群, H をその閉部分群とし, $\rho: G \times G/H \to G/H$ を $\rho(g, kH) = gkH$ と定義すると, ρ は G の G/H への C^∞ 級の作用となる. ρ が忠実であるための必要十分条件は, H が単位元から成る群以外の G の正規部分群を含まないことである.

リー群 G が M に C^∞ 級に作用しているとき, その作用を ρ とし, さらに $\mathfrak{g}$ を G に付属するリー環とする. $X \in \mathfrak{g}$ に対して, 各 $x \in M$ 毎に,

$$(*) \qquad \dot{\rho}(X)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp tX)(x)$$

と定義すれば, $\dot{\rho}(X)$ は M 上の C^∞ 級接ベクトル場となることが容易にわかる. 一方,

$$\frac{d}{dt}\rho(\exp tX)(x) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho(\exp sX)\,\rho(\exp tX)(x)$$

$$= \dot{\rho}(X)(\rho(\exp tX)(x))$$

だから, $\rho(\exp tX)(x)$ は x を通る $\dot{\rho}(X)$ の積分曲線であり, これが $-\infty <$

$t<\infty$ で定義されていることより $\dot{\rho}(X)$ が完備な接ベクトル場であることがわかる．

$\mathscr{X}(M)$ を M 上の C^∞ 級の接ベクトル場全体とすると，前章の **8°** 補題1で述べたように，$\tilde{X}$，$\tilde{Y} \in \mathscr{X}(M)$ に対しては，リー括弧積 $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ が定義され，$[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathscr{X}(M)$ となる．つまり，$\mathscr{X}(M)$ は[,]に関して（無限次元の）リー環になっている．

上の（$*$）で定義した $\dot{\rho}$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathscr{X}(M)$ への写像と見ることができるが，これについて次が成立する：

定理　ρ: $G \times M \to M$ をリー群 G の M への C^∞ 級の作用とすると，$\dot{\rho}$: $\mathfrak{g} \to \mathscr{X}(M)$ はリー環の準同形写像となる．

証明　(i)　$\lambda \in \boldsymbol{R}$ とすれば，

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(\lambda X)(x) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(\exp t(\lambda X))(x)\\ &= \lambda\frac{d}{d\lambda t}\bigg|_{\lambda t=0}\rho(\exp(\lambda t)X)(x)\\ &= \lambda\dot{\rho}(X)(x).\end{aligned}$$

(ii)　X，$Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\exp tX \cdot \exp tY$ は e を通る C^∞ 級曲線で，e における接ベクトルは $X+Y$ である．〈G.5〉を使うと，

$$\exp t(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{t}{n}X \cdot \exp\frac{t}{n}Y\right)^n.$$

したがって，ρ: $G \to \mathscr{D}(M)$ が準同形写像だから，

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(X+Y)(x) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho\left(\lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{t}{n}X\cdot\exp\frac{t}{n}Y\right)^n(x)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\lim_{n\to\infty}\left(\rho\left(\exp\frac{t}{n}X\right)\cdot\rho\left(\exp\frac{t}{n}Y\right)\right)^n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\rho\left(\exp\frac{t}{n}X\right)\cdot\rho\left(\exp\frac{t}{n}Y\right)\right)^n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n\dot{\rho}\left(\frac{1}{n}X\right)+n\dot{\rho}\left(\frac{1}{n}Y\right)\right) = \dot{\rho}(X)+\dot{\rho}(Y).\end{aligned}$$

これで $\dot{\rho}$ の線形性が示せた．

(iii) $X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると，〈G.6〉より，

$$\dot{\rho}([X, Y])(x) = \dot{\rho}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tY)X\right)(x)$$

x を固定して考えれば，$\dot{\rho}$ の線形性より，

$$\dot{\rho}([X, Y])(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \dot{\rho}(\mathrm{Ad}(\exp tY)X)(x).$$

一方，両辺が同じ微分方程式をみたすことより

$$\exp s\,\mathrm{Ad}(g)X = g \exp sX \cdot g^{-1}$$

だから，

$$\dot{\rho}([X, Y])(x) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \rho(\exp tY)\rho(\exp sX)\rho(\exp -tY)(x).$$

$\varphi_t = \rho(\exp tY)$，$\psi_s = \rho(\exp sX)$ と書き，$\varphi_t, \psi_s \in \mathcal{D}(M)$ に注意すれば，

$$\dot{\rho}([X, Y])(x) = \left.\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\right|_{(t,s)=(0,0)} \varphi_t(\psi_s(\varphi_{-t}(x)))$$

だから局所座標系を使って計算すれば，容易に

$$\begin{aligned}\dot{\rho}([X, Y])(x) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\varphi_t)_x \dot{\rho}(X)(x) + \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \dot{\rho}(X)(\varphi_{-t}(x)) \\ &= \dot{\rho}(X)\dot{\rho}(Y)(x) - \dot{\rho}(Y)\dot{\rho}(X)(x) = [\dot{\rho}(X), \dot{\rho}(Y)](x)\end{aligned}$$

となり，$\dot{\rho}$ が準同形写像であることがわかる． □

$\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ が完備な接ベクトル場のとき，$x \in M$ を始点とする $\widetilde{X}$ の積分曲線を $\varphi_t(x)$ と書けば，2 章 **2°** 定理 3 より $\varphi_t \in \mathcal{D}(M)$ であるが，常微分方程式の解の一意性より，$\varphi_{t+s} = \varphi_t \varphi_s$ がわかるから $t \mapsto \varphi_t$ は $\boldsymbol{R}$ から $\mathcal{D}(M)$ への準同形写像である．そこで，$\mathcal{D}(M)$ は無限次元の集合であり，前節の意味ではリー群ではないが，φ_t を $\exp t\widetilde{X}$ と書くことにすれば，$X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\rho(\exp tX) = \exp t\,\dot{\rho}(X)$$

が成立していることがわかる．2 章 **2°** 定理 2 を使えば，M がコンパクト多様体ならば $\mathfrak{X}(M)$ の任意の元は完備となるから，指数写像 exp が $\mathfrak{X}(M)$ から $\mathcal{D}(M)$ への写像として定義される．しかし，M がコンパクトでないと，

$\mathscr{X}(M)$ は必ず完備でない元を含んでいる．

M がポアソン多様体（無論シンプレクティック多様体はポアソン多様体である）のとき，M から M の上へのポアソン同形写像の全体を $\mathscr{D}_{\{,\}}(M)$ と書く．これは $\mathscr{D}(M)$ の部分群であるが，$\mathscr{D}(M)$ と同様無限次元の集合であるから通常の意味ではリー群ではない．

さて，リー群 G が M に **ポアソン同形写像として作用** しているとは，作用を ρ としたとき，任意の $g \in G$ に対して $\rho(g) \in \mathscr{D}_{\{,\}}(M)$ となっている場合を言う．

M がシンプレクティック多様体の場合には $\mathscr{D}_{\{,\}}(M)$ の元は **正準変換** と呼ばれることが多いので，こういう場合の G は **正準変換群として作用** していると呼ばれることもある．

$\mathfrak{g}$ を G に付属するリー環とすると，$\dot{\rho}(X)$ は $\mathscr{X}(M)$ の元であるが，$\dot{\rho}(X)$ の定義から，$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$(\dot{\rho}(X)f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\rho(\exp tX)(x)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho(\exp tX)^* f)(x)$$

である．まず次のことに注意しよう：

補題1 $\rho: G \to \mathscr{D}_{\{,\}}(M)$ がリー群 G の M へのポアソン同形写像としての作用ならば，$\dot{\rho}(X)$ は次の性質を持つ：

(i) $\dot{\rho}(X)(fg) = (\dot{\rho}(X)f)g + f\dot{\rho}(X)g$

(ii) $\dot{\rho}(X)\{f, g\} = \{\dot{\rho}(X)f, g\} + \{f, \dot{\rho}(X)g\}$

$f, g \in C^\infty(M)$

証明 $\dot{\rho}(X)$ は接ベクトル場だから (i) は明らか．(ii) は，

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(X)\{f, g\} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp tX)^*\{f, g\} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{\rho(\exp tX)^* f, \ \rho(\exp tX)^* g\} \\ &= \{\dot{\rho}(X)f, g\} + \{f, \dot{\rho}(X)g\}. \quad \square\end{aligned}$$

そこで，$\mathscr{X}(M)$ の元で，上の (ii) の性質を持つものを，無限小ポアソン同形写像，または **ポアソン・ベクトル場**（M がシンプレクティックのときには，**無限小正準変換**，または **正準ベクトル場**）と呼び，これの全体を $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ と書く．$\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ のとき，$[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ は接ベクトル場であるが，容易な計算で，$[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ であることがわかる．$\mathscr{X}(M)$ が $[\ ,\ ]$ に関してリー環であったからヤコビ恒等式は $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ についても成立し，したがって，$\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ も $[\ ,\ ]$ に関してリー環になる．前定理により，$\dot{\rho}$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ へのリー環としての準同形写像であることがわかる．

一方，$C^\infty(M)$ は，$\{\ ,\ \}$ に関してリー環になっているのであるが，任意の f に対して，$\mathrm{ad}(f)h = \{f, h\}$ と定義すれば，次のことが容易にわかる：

補題 2 $\mathrm{ad}(f) \in \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ であり，$\mathrm{ad}: f \mapsto \mathrm{ad}(f)$ は $C^\infty(M)$ から $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ の中への準同形写像である．

話がこみ入ってきたので，情況を図示しておくと，

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ \dot{\rho}\ } & \mathscr{X}_{\{,\}}(M) \\ & & \nearrow \mathrm{ad} \\ & C^\infty(M) & \end{array}$$

となる．我々は，2 章の終りで定義したモーメント写像を詳しく見るためにリー群の概念を持ちだしてきたのであったから，当然 $C^\infty(M)$ の中に入っている $\{\ ,\ \}$ に関するリー環を考えたいわけであって，$\dot{\rho}(\mathfrak{g})$ のように $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ の中に入っているリー環では困るわけである．したがって，これを何とか $C^\infty(M)$ の方へ移動させなければならないのだが，まず困ることは，一般には，写像

$$\mathrm{ad}:\ C^\infty(M) \to \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$$

は，全射（onto）ではないという事実である．しかし，次のことは言える：

補題 3　M が連結なシンプレクティック多様体ならば, $\mathrm{Ker\,ad} = \boldsymbol{R}$. つまり, ad: $C^\infty(M) \to \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ は定数関数の不定性を除けば 1 対 1 である.

証明　$\mathrm{ad}(f) = 0$ を局所標準座標系で書いてみると

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 0$$

つまり, $df = 0$. M が連結だから, これは $f = c$（定数）を意味する.　□

そこで次節では M を連結なシンプレクティック多様体に限定してモーメント写像を G の作用から作ることを考えよう.

3° G の正準変換としての作用とモーメント写像

M を連結なシンプレクティック多様体とする. 前節の話からad$(C^\infty(M)) \subset \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ であるが, 一般には等号は成立しないので, $\tilde{X} = \mathrm{ad}(f)$ の形に書けるベクトル場を **ハミルトン・ベクトル場** と呼び, 一般の正準ベクトル場と区別する. そして, ハミルトン・ベクトル場の全体を $\mathscr{X}_H(M)$ $(= \mathrm{ad}(C^\infty(M)))$ と書く.

補題 1　$[\mathscr{X}_{\{,\}}(M), \mathscr{X}_{\{,\}}(M)] \subset \mathscr{X}_H(M)$.

証明　$\tilde{X} \in \mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ を局所標準座標系 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ を用いて書き,

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

とすれば, $\tilde{X}x_i = -\xi_i$, $\tilde{X}y_j = \eta_j$ である. $\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$, $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$ であるから, 座標近傍上では,

$$\begin{cases} \tilde{X}\{x_i, x_j\} = -\{\xi_i, x_j\} - \{x_i, \xi_j\} = 0 \\ \tilde{X}\{y_i, y_j\} = \{\eta_i, y_j\} + \{y_i, \eta_j\} = 0 \\ \tilde{X}\{x_i, y_j\} = -\{\xi_i, y_j\} - \{x_i, \eta_j\} = 0 \end{cases}$$

となり，これより，

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}=\frac{\partial \xi_j}{\partial y_i},\qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \eta_j}{\partial y_i}$$

が得られる．座標近傍は単連結として良いから，ポアンカレの定理により，適当な C^∞ 級関数 f を用いて

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial y_i},\qquad \eta_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

の形にこの座標近傍上でなら書くことができる．つまり $\tilde{X}$ は，局所的には $\mathrm{ad}(f)$ の形に書けるのである．f のとり方は定数関数の差を除けば一意的である．

$\tilde{Y}\in\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ についても同じことをやれば，単連結な座標近傍上では，$\tilde{Y}=\mathrm{ad}(h)$ と書ける．ところで，

$$[\tilde{X},\ \tilde{Y}]=[\mathrm{ad}(f),\ \mathrm{ad}(h)]=\mathrm{ad}\{f,\ h\}$$

であったが f や h は $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ から定数差を除いて一意的にきまるものであったから $\{f,\ h\}$ の方はこの定数関数の差は全く影響しなくなり，したがって $\{f,\ h\}$ は $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ だけによってきまってしまう．このことより，$\{f,\ h\}$ は座標系のとり方によらずに M 上の C^∞ 級関数となることがわかる．これで補題は証明された． □

上の補題の証明から，$\tilde{X}\in\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ は局所的には $\mathrm{ad}(f)$ の形で書けるのだが f は座標近傍上で定義された関数でしかなく一般には M 上の関数ではないということが $\mathcal{X}_H(M)$ と $\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ とを区別しているのだということがわかる．これをもっと精密に見ると，次の定理になるが証明は与えないでおこう：

定理 1 $\mathcal{X}_{\{,\}}(M)/\mathcal{X}_H(M)=H^1(M)$．ただし，$H^1(M)$ は M の **1 次元ドラム・コホモロジー群** と呼ばれるもので，M の大域的性質を記述するものである．特に，M が単連結ならば $H^1(M)=\{0\}$．したがって，$\mathcal{X}_{\{,\}}(M)=\mathcal{X}_H(M)$ となる．

さて，連結なリー群 G が，$H^1(M)=\{0\}$ であるような連結なシンプレクティック多様体 M に正準同形写像として C^∞ 級に作用しているものとし，その

作用を ρ とする．ρ は **2°** の定義式（$*$）によって，G に付属するリー環 $\mathfrak{g}$ から $\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ への準同形写像 $\dot{\rho}$ を引起す．$\dot{\rho}$ の像 $\dot{\rho}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ と書けば $\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ は $\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ の部分リー環であるが，$H^1(M)=\{0\}$ の仮定より $\mathcal{X}_{\{,\}}(M)=\mathcal{X}_H(M)$ であるので，$\dot{\rho}(X)$ は必ず $\mathrm{ad}(f)$ の形に書ける．そこで，

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\{f\in C^\infty(M)\,;\,\mathrm{ad}(f)\in\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}\}$$

とすれば，$\tilde{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ より1次元だけ次元の高い $C^\infty(M)$ の線形部分集合であるが，次のこともわかる．

補題 2　$\tilde{\mathfrak{g}}$ は $C^\infty(M)$ のポアソン括弧積 $\{\ ,\ \}$ に関してリー環になっている．

証明　$f,g\in\tilde{\mathfrak{g}}$ のとき，$[\mathrm{ad}(f),\mathrm{ad}(g)]=\mathrm{ad}\{f,g\}$ だから，$\{f,g\}\in\tilde{\mathfrak{g}}$ である．
□

$\tilde{\mathfrak{g}}\subset C^\infty(M)$ だから，2章 **11°** でやったようにモーメント写像 $\mu\colon M\to\tilde{\mathfrak{g}}^*$ が考えられることになったのである．$\tilde{\mathfrak{g}}$ は，$\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ より1次元だけ次元が高くなっているのだが，大きくなったのは定数関数の分だけであり，定数関数 c は任意の $f\in C^\infty(M)$ に対して $\{c,f\}=0$ となることに注意しよう．

一般に，リー環 $(\mathcal{L},[\ ,\ ])$ において，

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}=\{c\in\mathcal{L}\,;\,[c,\mathcal{L}]=\{0\}\}$$

を $\mathcal{L}$ の **中心**（center）と呼ぶ．$(C^\infty(M),\{\ ,\ \})$ の中心は定数関数全体 $\boldsymbol{R}$ である．$\tilde{\mathfrak{g}}$ の中心 $\mathcal{Z}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ は定数関数全体 $\boldsymbol{R}$ を含んでおり，$\tilde{\mathfrak{g}}/\boldsymbol{R}\cong\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ である．このように $\tilde{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ に，中心に含まれるような $\boldsymbol{R}$ をつけ加えて拡大したものだと解釈できるので，$\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ の **中心拡大** と呼ばれることがある．

さて，もともとの作用 $\rho\colon G\to\mathcal{D}_{\{,\}}(M)$ は忠実とは仮定していなかったが，$\mathrm{Ker}\,\rho=\bigcap_{x\in M}\{g\in G\,;\,\rho(g)(x)=x\}$ であり $\rho\colon G\times M\to M$ は連続だから $\mathrm{Ker}\,\rho$ は G の正規閉部分群となる．したがって，〈G.2〉によって $G/\mathrm{Ker}\,\rho$ もリー群となるので，これを G_1 と書き，G_1 に付属するリー環を $\mathfrak{g}_1$

とする．準同形写像 $\rho\colon G\to\mathcal{D}_{\{,\}}(M)$ は自然に，単射(1対1)準同形写像 $\rho_1\colon G_1\to\mathcal{D}_{\{,\}}(M)$ を引起す．つまり，G_1 は M に忠実に作用することになる．無論 $\rho(G)=\rho_1(G_1)$ である．

ρ_1 に対して $\dot{\rho}_1\colon \mathfrak{g}_1\to\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ を作れば，$\rho_1(\exp tX)=\exp t\dot{\rho}_1(X)$ が任意の $X_1\in\mathfrak{g}_1$ に対して成立することより $\dot{\rho}\colon \mathfrak{g}_1\to\mathcal{X}_{\{,\}}(M)$ も単射であることがわかる．この場合も無論 $\dot{\rho}_1(\mathfrak{g}_1)=\dot{\rho}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ であるから，$\dot{\rho}_1\colon \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ はリー環としての同形写像であることがわかる．つまり，作用 $\rho\colon G\to\mathcal{D}_{\{,\}}(M)$ が忠実でない場合には適当に G や ρ を作り直すことにより，初めから ρ が忠実であると仮定しておいても一般性を失わない所に話を持っていくことができ，この場合には，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ を同形としてしまって良いことがわかる．

以下では G は M に忠実に作用しているものとしよう．すると，$\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}^{\dot{\rho}}$ として良いからこの2つを $\dot{\rho}$ を通じて同一視すれば，$\mathrm{ad}\colon \tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ が全射準同形として良いことがわかる．

リー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ は有限次元だから〈G.8〉,〈G.9〉によって，$\tilde{\mathfrak{g}}$ をリー環として持つ単連結なリー群 $\widetilde{G}$ が存在する．しかも〈G.10〉により，$\widetilde{G}$ から G への準同形写像 $\widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \widetilde{G}\to G$ で，

$$(D\widetilde{\mathrm{Ad}})_e=\mathrm{ad}\colon\ \tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$$

となるものが存在する．したがって，$\tilde{\rho}(g)=\rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(g))$ と定義すれば，$\tilde{\rho}$ は $\widetilde{G}$ の M への(忠実ではない)作用となる．しかも，$\widetilde{G}$ のリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ は自然に $(C^\infty(M),\{\ ,\ \})$ の部分リー環になっている．ここまでの情況を次の定理の形にまとめておく．

定理2　連結なリー群 G がシンプレクティック多様体 M に正準変換群として忠実に作用しているとし，任意の $X\in\mathfrak{g}$ につき，$\dot{\rho}(X)$ がハミルトン・ベクトル場になっているものとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の中心拡大 $\tilde{\mathfrak{g}}$ で $\dim\tilde{\mathfrak{g}}=\dim\mathfrak{g}+1$ となるものが $C^\infty(M)$ のリー部分環として存在する．したがって，

モーメント写像 $\mu: M \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ が考えられる．

$\tilde{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ より1次元だけ次元が高くなってしまうと述べたのだが，多くの場合には，$\tilde{\mathfrak{g}}$ はリー環として $\mathfrak{g} \oplus \boldsymbol{R}$ となってしまう．こういう場合には $\tilde{\mathfrak{g}}$ の中に含まれる $\mathfrak{g}$ を使ってモーメント写像を考えることができ，こういう場合には話がいくらか単純になるのだが，それはさておき，最後に，どうしても $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \boldsymbol{R}$ とはならない例を与えておこう．

$C^\infty(\boldsymbol{R}^{2n})$ に $\{\ ,\ \}$ を

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

で導入すれば，$\boldsymbol{R}^{2n}$ はシンプレクティック多様体となる．加法を演算とする可換なリー群 $\boldsymbol{R}^{2n}$ を考え，これの $\boldsymbol{R}^{2n}$ への作用 ρ を，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^{2n}$，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R}^{2n}$ として

$$\rho((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{v})$$

と定義すれば，$\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, \overset{i}{\check{1}}, 0, \cdots, 0)\ (1 \leqq i \leqq 2n)$ として，

$$\dot{\rho}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \dot{\rho}(\boldsymbol{e}_{n+i}) = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

となる．ρ が正準変換群としての $\boldsymbol{R}^{2n}$ の作用であることは明らかであり，

$$\mathrm{ad}(-y_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathrm{ad}(x_i) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

である．

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{ f \in C^\infty(M);\ \mathrm{ad}(f) \in \dot{\rho}(\boldsymbol{R}^{2n}) \}$$

を考えれば，$\tilde{\mathfrak{g}}$ は $\boldsymbol{R}^{2n}$ 上の1次式の全体である．このリー環を**ハイゼンベルグ**(Heisenberg)**リー環**と呼び，$\mathcal{H}$ と書く．

$$\mathrm{ad}: \mathcal{H} \to \boldsymbol{R}^{2n}$$

なる準同形写像は全射ではあるが，$\mathcal{H}$ 自身はリー環としては $\boldsymbol{R}^{2n} \oplus \boldsymbol{R}$ のように分解することはない．なぜなら，分解するとしたら $\{X, Y\} = 0$ が任意の $X, Y \in \mathcal{H}$ で成立しなければならないが，$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$ だからである．

4° モーメント写像の同変性と余随伴軌道（coadjoint orbit）

M を連結なシンプレクティック多様体とし，連結なリー群 G が正準変換群として忠実，かつ C^∞ 級に作用しているものとし，その作用を ρ とする．G のリー環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^\rho$ とは同一視して考えるとすれば，$\mathfrak{g}$ は $\mathscr{X}_{\{,\}}(M)$ の部分リー環と思って良いが，この節ではこれが $\mathfrak{g} \subset \mathscr{X}_H(M)$ となっているものとして話を始めよう．ad: $C^\infty(M) \to \mathscr{X}_H(M)$ による $\mathfrak{g}$ の原像 $\mathrm{ad}^{-1}(\mathfrak{g})$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ とすれば，前節で示したように $\tilde{\mathfrak{g}}$ は $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ の部分リー環となる．そこで，2 章 **11°** でやったように，$p \in M$ に対して，$\delta_p \mid \tilde{\mathfrak{g}} \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ を対応させる写像（モーメント写像）μ を考えるのだが μ: $M \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ が G の作用とどのように結びついているのかを考えるのがこの節の主題である．そのためにまず，$\tilde{\mathfrak{g}}$ をリー環として持つ単連結なリー群 $\widetilde{G}$ を用意する．

$\tilde{g} \in \widetilde{G}$ に対して $\mathrm{Ad}(\tilde{g})$ は **1°** の ⟨G.6⟩ の所で定義されているが，Ad: $\widetilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ は $\widetilde{G}$ の C^∞ 級の作用であることが容易にわかる．さらに $\mathrm{Ad}(\tilde{g})$ の相対写像を $\mathrm{Ad}^*(\tilde{g})$: $\tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ とすれば Ad^*: $\widetilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ も C^∞ 級であり，$\mathrm{Ad}^*(\tilde{g}\tilde{h}) = \mathrm{Ad}^*(\tilde{h})\mathrm{Ad}^*(\tilde{g})$ が成立する．

補題 1 任意の $\tilde{g} \in \widetilde{G}$，$f \in \tilde{\mathfrak{g}}\ (\subset C^\infty(M))$，$p \in M$ に対して

$$(\mathrm{Ad}(\tilde{g})f)(p) = (\rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}^{-1}))^* f)(p)$$

が成立する．ただし，$\widetilde{\mathrm{Ad}}$: $\widetilde{G} \to G$ は ⟨G.10⟩ を用いて前節で作った $(D\widetilde{\mathrm{Ad}})_e = \mathrm{ad}$: $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ をみたす写像である．

証明 $\widetilde{G}$ は連結だから，$\tilde{g}$ と単位元 $\tilde{e}$ を結ぶ C^∞ 級曲線 $\tilde{g}(t)$ をとる．$\tilde{g}(0) = \tilde{e}$，$\tilde{g}(1) = \tilde{g}$ とし，$\tilde{g}(t)$ の t における接ベクトルを使って $h_t \in \tilde{\mathfrak{g}}\ (\subset C^\infty(M))$ を

$$\frac{d}{dt} g(t) = dR_{g(t)} h_t \quad (= h_t \cdot g(t) \text{ と書いてもよい})$$

で定義すると，$\widetilde{G}$ がリー群だから

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\tilde{g}(t))f = \mathrm{ad}(h_t)\mathrm{Ad}(\tilde{g}(t))f = \{h_t, \mathrm{Ad}(\tilde{g}(t))f\}$$

となる．一方，$h_t \in C^\infty(M)$ だから，$\mathrm{ad}(h_t)$ を h_t から作るハミルトン・ベクトル場だと思うと，上の式は，初期条件が f であるような，M 上の偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t = \mathrm{ad}(h_t) f_t, \qquad f_0 = f$$

の解になっている．この微分方程式は次のような考え方で解くことができる．まず，M 上で，積分曲線を求める方程式

$$\frac{d}{dt} p_t = -\mathrm{ad}(h_t)(p_t), \qquad p_0 = p$$

を考えるとこの解は，$\rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}(t)^{-1}))(p)$ で与えられることがわかる．これさえわかれば，上の方程式の解は一意的に $\rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}(t)^{-1}))^* f$ で与えられることが知られている（代入して確かめてみよ）．*) これより，望みの等式が得られる．　□

$\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ に対して，$\mathrm{Ad}^*(\tilde{g})\lambda$ は，

$$\langle \mathrm{Ad}^*(\tilde{g})\lambda, f\rangle = \langle \lambda, \mathrm{Ad}(\tilde{g}) f\rangle = \langle \lambda, \rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}^{-1}))^* f\rangle$$

によって定義されるから，結局次のこともわかる：

系　$\mathrm{Ad}^*(\tilde{g}) : \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ は $\rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}))$ にしか依存しない．

$\mathrm{Ad}^*(\tilde{g}) = \rho(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g}^{-1}))^{**}$ なのでこれを $\rho^*(g) : \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ と書くことにしよう．つまり，$\rho^*(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\tilde{g})) = \mathrm{Ad}^*(\tilde{g})$ である．これを用いて，**モーメント写像の同変性** と呼ばれる定理を与えよう．

定理 1　モーメント写像 $\mu : M \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ は次の性質を持つ：

$$\mu(\rho(g^{-1})(p)) = \rho^*(g)(\mu(p))$$

証明　$\mu(p) = \delta_p \mid \mathfrak{g} \in \mathfrak{g}^*$ だから，

$$\begin{aligned}\langle \rho^*(g)(\mu(p)), f\rangle &= \langle \mu(p), \rho(g^{-1})^* f\rangle = (\rho(g^{-1})^* f)(p) \\ &= f(\rho(g^{-1})(p)) = \langle \delta_{\rho(g^{-1})(p)}, f\rangle = \langle \mu(\rho(g^{-1})(p)), f\rangle.\end{aligned}$$

これより，望みの等式が得られる．　□

---

*)　次節 **5°** の補題 1 参照．

モーメント写像の同変性により様々なことがわかるのだが，まず次のことに注意しよう：

補題 2 $\widetilde{G}$ を任意の連結なリー群，$\tilde{\mathfrak{g}}$ をそのリー環とする.

$$\alpha(g)(\lambda) = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\lambda, \qquad \lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$$

と定義すると，α: $\widetilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ は $\widetilde{G}$ の，ポアソン多様体 $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ へのポアソン同形写像としての C^∞ 級の作用である.

証明 α が C^∞ 級の作用であることは容易にわかるから，$\alpha(g) = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})$ がポアソン同形写像であることを示す．$\tilde{\mathfrak{g}}^*$ をポアソン多様体にするには，前章 **11°** のやり方で，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の基底を $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ と書き，これを $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ 上の1次関数と思い，$f = f(\xi_1, \cdots, \xi_N)$，$h = h(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ に対して

$$\{f, h\}_{\tilde{\mathfrak{g}}^*} = \sum_{i,j=1}^{N} \{\xi_i, \xi_j\} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}$$

と定義すればよかった．$\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ に対しては，

$$f(\xi_1, \cdots, \xi_N)(\lambda) = f(\langle\lambda, \xi_1\rangle, \cdots, \langle\lambda, \xi_N\rangle)$$

だから（多項式で考えて見よ），$g \in \widetilde{G}$ に対して

$$\begin{aligned}(\alpha(g)^* f)(\lambda) &= f(\langle \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\lambda, \xi_1\rangle, \cdots, \langle \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\lambda, \xi_N\rangle) \\ &= f(\langle\lambda, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_1\rangle, \cdots, \langle\lambda, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_N\rangle) \\ &= f(\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_1, \cdots, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_N)(\lambda).\end{aligned}$$

したがって，

$$\{\alpha(g)^* f, \alpha(g)^* h\} = \sum_{i,j=1}^{N} \{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_i, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_j\} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\#) \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\#)$$

ただし，# の部分には $(\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_1, \cdots, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_N)$ が入っている．$\{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_i, \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_j\} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\{\xi_i, \xi_j\} = \sum_{k=1}^{N} c_{i}{}^{k}{}_{j} \mathrm{Ad}(g^{-1})\xi_k$ だから，

$$\{\alpha(g)^* f, \alpha(g)^* h\} = \alpha(g)^* \{f, h\}.$$

これは，$\alpha(g)$ がポアソン同形写像であることを示している. □

上の補題の仮定は無論補題1や定理1の情況下ではみたされているので，

以下しばらくはこの仮定のままで話を進める．

$\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ に対して，$\alpha(\tilde{G})(\lambda)$ を，$\tilde{G}$ の λ を通る **軌道**(orbit)と呼ぶ．作用 α が $\tilde{G}$ の随伴作用 Ad：$\tilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ の相対であるので，**余随伴軌道**(coadjoint orbit)と呼ばれることもある．次の定理は後々重要な役割を受持つことになる：

定理2　(i)　任意の $f \in C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ に対してベクトル場 $\mathrm{ad}(f) = \{f,\ \}$ は点 $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ においては $\alpha(\tilde{G})(\lambda)$ に接している．*)

(ii)　$f \in C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ が $\{f, C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)\} = \{0\}$ をみたすことと，f が $\tilde{G}$-不変．つまりすべての $g \in \tilde{G}$ に対して $\alpha(g)^* f = f$ となることとは同値である．

証明　(i)　$f = f(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ のとき，点 $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ ($= \boldsymbol{R}^N$) では，

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(f)(\lambda) &= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\lambda)\{\xi_i, \xi_j\}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_\lambda \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\langle\lambda, \xi_1\rangle, \cdots, \langle\lambda, \xi_N\rangle)\, c_i{}^k{}_j \langle\lambda, \xi_k\rangle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_\lambda.\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}(\lambda)$ を $a_i \in \boldsymbol{R}$ とおき，$X_\lambda = \sum_{i=1}^{N} a_i \xi_i \in \tilde{\mathfrak{g}}$ とおけば，

$$\mathrm{ad}(f)(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \{X_\lambda, \xi_j\}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_\lambda = \sum_{j=1}^{N} \langle\lambda, \{X_\lambda, \xi_j\}\rangle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_\lambda$$

と書ける．

一方，$\mathrm{Ad}(\exp tX_\lambda)$：$\tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ を考えれば，ξ_j は $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ 上の1次関数であると同時に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の元であるから

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX_\lambda)\xi_j = \{X_\lambda, \xi_j\}.$$

したがって，$\mathrm{Ad}(\exp tX_\lambda)$ の相対写像を $\mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)$ とすれば，

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)\nu, \xi_j\rangle = \langle \nu, \{X_\lambda, \xi_j\}\rangle.$$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)\nu = \mathrm{ad}^*(X_\lambda)\nu$$

---

*)　“接する”の意味は証明の中で明らかとなろう．

と書けば, $\langle \mathrm{ad}^*(X_\lambda)\nu, \xi_j\rangle = \langle \nu, \{X_\lambda, \xi_j\}\rangle$ が成立する. つまり $\mathrm{ad}^*(X_\lambda)$ は $\mathrm{ad}(X_\lambda)$ の相対写像となっている. したがって,

$$\mathrm{ad}(f)(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \langle \mathrm{ad}^*(X_\lambda)\lambda, \xi_j\rangle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_\lambda .$$

これは, 接ベクトル $\mathrm{ad}^*(X_\lambda)\lambda$ を座標関数 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ を用いて表示したものと考えられるから, 結局,

$$\mathrm{ad}(f)(\lambda) = \mathrm{ad}^*(X_\lambda)\lambda = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)\lambda$$

を得る.

ところで $\mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)\lambda$ は軌道 $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ 内にある曲線であり $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp tX_\lambda)\lambda$ はその接線だから, $\mathrm{ad}(f)(\lambda)$ は $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ に接していることになる.

(ii) $h \in C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ が $\widetilde{G}$-不変であれば, h は任意の余随伴軌道上で一定値となる. 一方, 任意の $f \in C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ に対して $\mathrm{ad}(f)(\lambda)$ は $\alpha(G)(\lambda)$ に接しているから $(\mathrm{ad}(f)h)(\lambda) = 0$. つまり $\{f, h\}(\lambda) = 0$ が任意の $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ で成立する.

逆に, $\{h, C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)\} = \{0\}$ となる h を考える. $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ を任意に固定し, $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ を動かして

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp tX)(\lambda) = \mathrm{ad}^*(X)\lambda$$

の全体を考えれば, これは $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ の λ における“接空間” $T_\lambda \alpha(G)(\lambda)$ になっている. $\{h, C^\infty(\tilde{\mathfrak{g}}^*)\} = \{0\}$ ということは, (i) での計算から, h を λ において $T_\lambda \alpha(G)(\lambda)$ の方向に微分したものが 0 となることを意味する. λ は任意だからこれは h が各軌道上で一定値であることを意味する.

上の説明では本当は $\alpha(G)(\lambda)$ が C^∞ 級の多様体であることを最初に示しておかなければ意味が付かない. これを示すには $\widetilde{G}_\lambda = \{ g \in \widetilde{G} ; \alpha(g)\lambda = \lambda \}$ とおくと, $\widetilde{G}_\lambda$ は $\widetilde{G}$ の閉部分群であり, 軌道 $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ が $\widetilde{G}/\widetilde{G}_\lambda$ の形で書けることに注意して 〈G.1〉, 〈G.11〉 を使えば良い. □

良く似た考え方で次のこともわかる:

定理 3 $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ 内の余随伴軌道はすべてシンプレクティック多様体である.

証明　$\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ における $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ のポアソン多様体としての階数は，$\{c_{i\,j}^{\,k}\}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ の構造定数とすると，歪対称行列，

$$A_{ij}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} c_{i\,j}^{\,k} \langle \lambda, \xi_k \rangle = \{\xi_i, \xi_j\}(\lambda)$$

の階数である．ところがこれは，

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} \{X, \xi_j\}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigg|_{\lambda} ;\ X \in \tilde{\mathfrak{g}} \right\} = \left\{ \mathrm{ad}^*(X)(\lambda) ;\ X \in \tilde{\mathfrak{g}} \right\}$$

の次元に等しい．上の集合は軌道 $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ の λ における接平面 $T_\lambda \alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ である．

一方，$T_\lambda \tilde{\mathfrak{g}}^* = \tilde{\mathfrak{g}}^*$ だから，$T_\lambda^* \tilde{\mathfrak{g}}^* = \tilde{\mathfrak{g}}^{**} = \tilde{\mathfrak{g}}$ となる．そこで，$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{ X \in \tilde{\mathfrak{g}};\ \langle X, T_\lambda \alpha(\widetilde{G})(\lambda) \rangle = 0 \}$ とおき，$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda \oplus F_\lambda$ と線形直和分解すれば，F_λ は自然に $T_\lambda^* \alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ と同一視される．そこで，$\{\ ,\ \}_\lambda$: $T_\lambda^* \tilde{\mathfrak{g}}^* \times T_\lambda^* \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \boldsymbol{R}$ を

$$\{X, Y\}_\lambda = \{X, Y\}(\lambda) = \langle \lambda, \{X, Y\} \rangle, \qquad X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$$

で定義すると，$\{\tilde{\mathfrak{g}}, Y\}_\lambda = \{0\}$ と $Y \in \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ とが同値となる．なぜなら，Y を $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ 上の 1 次式と見れば

$$\{\mathfrak{g}, Y\}_\lambda = \mathrm{ad}^*(\tilde{\mathfrak{g}})(\lambda)(Y) = \langle T_\lambda \alpha(G)(\lambda), Y \rangle$$

だからである．これによって，$\{\ ,\ \}_\lambda$ は $T_\lambda^* \alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ 上では非退化であることがわかり，これによって，$\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ 上にシンプレクティック多様体の構造が入る．　□

モーメント写像 μ: $M \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ は定理 1 により同変性があるから，任意の余随伴軌道 $\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ に対し，その原像 $\mu^{-1}(\alpha(\widetilde{G})(\lambda))$ は $\rho(\widetilde{G})$ で不変である．$\alpha(\widetilde{G})(\lambda)$ は $\widetilde{G}/\widetilde{G}_\lambda$ の形に書けるから多様体であるが，$\mu^{-1}(\alpha(\widetilde{G})(\lambda))$ は一般には多様体とはならない．しかし，$\mu^{-1}(\alpha(\widetilde{G})(\lambda))$ の各点で写像 μ に対し陰関数定理が使えれば，これは M の閉部分多様体となる．次節でサード (Sard) の定理を解説するが，これを使えばかなりたくさんの $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ に対して $\mu^{-1}(\alpha(\widetilde{G})(\lambda))$ が M の閉部分多様体となることがわかる．

この節の最後に簡単にわかる余随伴軌道の例を与えておこう：

例　**3°** で定義したハイゼンベルグ・リー環を $\mathscr{H}$ とする．これは $\boldsymbol{R}^{2n}$ 上の非退化歪対称の双 1 次写像 ω: $\boldsymbol{R}^{2n} \times \boldsymbol{R}^{2n} \to \boldsymbol{R}$ を使って $\boldsymbol{R}^{2n+1} = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^{2n}$ 上に

$[(c, \boldsymbol{Z}), (c', \boldsymbol{Z}')] = (\omega(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}'), 0)$ で定義されるリー環で，$\mathscr{H}$ をリー環に持つリー群は，$\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^{2n}$ 上に積を

$$(c, \boldsymbol{Z})(c', \boldsymbol{Z}') = \left(c + c' + \frac{1}{2}\omega(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}'),\ \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}'\right)$$

で入れたものである．$(c, \boldsymbol{Z})^{-1} = (-c, -\boldsymbol{Z})$ だから，

$$\mathrm{Ad}(c, \boldsymbol{Z})(c', \boldsymbol{W}) = (c' + \omega(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}),\ \boldsymbol{W}).$$

$\lambda \in (\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^{2n})^*$ を $\boldsymbol{R}$ 上，$\boldsymbol{R}^{2n}$ 上で 0 となるものに分解して $\lambda = (\lambda', \lambda'')$ とすると，$\langle(\lambda', \lambda''), (c, \boldsymbol{W})\rangle = \langle\lambda', W\rangle + \langle\lambda'', c\rangle$．したがって，

$$\mathrm{Ad}^*(c, \boldsymbol{Z})(\lambda', \lambda'') = (\lambda' + \langle\lambda'', \omega(\boldsymbol{Z},\quad)\rangle,\ \lambda'')$$

となる．これは $\lambda'' = 0$ であれば軌道は 1 点，$\lambda'' \neq 0$ であれば $\lambda'' =$ 一定 の $2n$ 次元の平面が軌道となることを示している．この平面が自然にシンプレクティック多様体となるのは明らかであろう．

5° Sard（サード）の定理，と余随伴軌道の原像

この節で述べるサード（Sard）の定理は，考えている多様体が第 2 可算性を持つことが前提となるので，この節で扱う多様体は第 2 可算性を持つものとする．

定理 1 （Sard の定理） $\varphi: M \to \boldsymbol{R}^l$ を，（第 2 可算性を持つ）C^∞ 級多様体 M から $\boldsymbol{R}^l$ への C^∞ 級写像とする．$(D\varphi)_p: T_pM \to \boldsymbol{R}^l$ を φ の p における微分写像とし，この階数を $r(\varphi, p)$ とする．

$$\textstyle\sum_\varphi = \{p \in M\,;\ r(\varphi, p) < l\}$$

とすると，$\varphi(\sum_\varphi)$ は $\boldsymbol{R}^l$ の中の体積 0 の集合となる．特に，$\varphi(\sum_\varphi)$ は $\boldsymbol{R}^l$ の空でない開集合を含み得ない．

証明は与えないので少し解説をしよう．$p \in \sum_\varphi$ においては $(D\varphi)_p T_pM$ の次元は $l-1$ 以下で，この集合は薄っぺらであり，無論体積も 0 である．

したがって，点 p の近傍 V_p の φ による像 $\varphi(V_p)$ も V_p を十分小さくすると薄っぺらなものとなり，その体積は V_p を p の ε-近傍としたとき，$\varepsilon^{l+\frac{1}{2}}$ 程度のものとなる．$\varphi(\sum_\varphi)$ はこういう薄っぺらな $\varphi(V_p)$ の $(1/\varepsilon)^l$ 個ほどで覆えてしまうことがわかるので $\varepsilon \to 0$ とすれば $\varphi(\sum_\varphi)$ の体積が 0 であることがわかるというのが定理の内容である．

この定理を前節のモーメント写像 μ: $M \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ に使ってみよう．まず，$(D\mu)_p$: $T_pM \to \tilde{\mathfrak{g}}^*$ を μ の p における微分写像とし，その階数を $\tilde{r}(\mu, p)$ とする．p を M 全体にわたって動かして $\tilde{r}(\mu, p)$ の最大値を r_0 とし，$\tilde{r}(\mu, p_0) = r_0$ とする．$V = (D\mu)_{p_0} T_{p_0} M$ とおき，$\tilde{\mathfrak{g}}^* = V \oplus W$ と分解し，この分解による $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ から V への射影を π とする．無論，$V = \tilde{\mathfrak{g}}^*$ のときには π は恒等写像である．$\dim V = r_0$ に注意し，モーメント写像の代りに，

$$\pi\mu: \quad M \to V$$

を考えれば，陰関数定理により $\pi\mu(M)$ は V の開集合を含んでいることがわかる．

p における $(D\pi\mu)_p = \pi(D\mu)_p$ の階数を $r(\pi\mu, p)$ とし，

$$\sum\nolimits_{\pi\mu} = \{ p \in M\,;\, r(\pi\mu, p) < r_0 \}$$

とすれば，定理1により，$\pi\mu(\sum_{\pi\mu})$ は V の開集合は含み得ないから，特に $\pi\mu(M) - \pi\mu(\sum_{\pi\mu}) \neq \phi$ となる．

$v \in \pi\mu(M) - \pi\mu(\sum_{\pi\mu})$ を $\pi\mu$ の **正則値** と呼ぶが，この v については $(\pi\mu)^{-1}(v) \cap \sum_{\pi\mu} = \phi$ であるから，任意の $p \in (\pi\mu)^{-1}(v)$ において $r(\pi\mu, p) = r_0$ である．ところが，

$$r(\pi\mu, p) = \mathrm{rank}\, \pi(D\mu)_p \leqq \mathrm{rank}\, (D\mu)_p \leqq r_0$$

であるから，これは $(\pi\mu)^{-1}(v)$ 上で $(D\mu)_p$ の階数も一定 r_0 であること，さらに π: $(D\mu)_p T_p M \to V$ が線形同形写像となることを示している．$\pi\mu$ に対して陰関数定理を使えば $(\pi\mu)^{-1}(v)$ が M の閉部分多様体であることがわかる．したがって，これの（どれか1つの）連結成分 N_v も M の閉部分多様体である．

$\mu(N_v)$ は $\mathfrak{g}^*$ の1点であることを示そう．$p, q \in N_v$ に対し $\mu(p) \neq \mu(q)$ とすれば，p と q とを N_v 内の C^∞ 級曲線 $c(t)$ で結べば，ある t で $(D\mu)_{c(t)}\dfrac{dc(t)}{dt} \neq 0$ とならなければならない．ところが $\pi\mu(N_v) = \{u\}$ であるから，$\pi(D\mu)_{c(t)}\dfrac{dc(t)}{dt} = 0$ であり，これは $\pi:(D\mu)_p T_p M \to V$ が全単射であったことに矛盾する．したがって，$\mu(N_v)$ は1点である．これが各連結成分で言えるので，$\mu(N_v) = \lambda$ としたとき，$\mu^{-1}(\lambda)$ は M の閉部分多様体となることがわかる．

$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ に対し，$r_0 = \max \tilde{r}(\mu, p)$ であったが，

$$\Sigma_\mu = \{ p \in M;\ \tilde{r}(\mu, p) < r_0 \}$$

とする．V を勝手に選んだ $\mathfrak{g}^*$ の r_0 次元の部分空間とし，π_V を $\mathfrak{g}^*$ から V への射影とすれば，π_V は開写像だから，サードの定理は次のことも言っている：

系　$\mu(\Sigma_\mu)$ は任意の r_0 次元の V に射影しても，その像 $\pi_V\mu(\Sigma_\mu)$ は V の開集合を含み得ない．

一方，上の推論から，$\mu(M)$ 自身は適当な V に射影すれば V の開集合を含む．したがって，$\mu(M) \supsetneqq \mu(\Sigma_\mu)$ である．$\lambda \in \mu(M) - \mu(\Sigma_\mu)$ を μ の **正則値** と呼ぶ．λ が $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ の正則値ならば，$\mu^{-1}(\lambda)$ は M の閉部分多様体となる．

さて，$\lambda \in \mathfrak{g}^*$ を μ の正則値とし，$N_\lambda = \mu^{-1}(\lambda)$ とする．N_λ は前章の最後に述べたことによりポアソン多様体となるが，さらに，$\tilde{G}_\lambda = \{ g \in \tilde{G};\ \alpha(g)\lambda = \lambda \}$ とすると，μ の同変性により，$\rho(\tilde{G}_\lambda)$-不変にもなっている．つまり，リー群 $\tilde{G}_\lambda$ が N_λ にポアソン同形写像として作用している．

一方，μ の同変性より，$\rho(\tilde{G})\Sigma_\mu = \Sigma_\mu$ が得られるから λ が μ の正則値なら，余随伴軌道 $\alpha(\tilde{G})(\lambda)$ のどの元も μ の正則値である．$\lambda', \lambda'' \in \alpha(\tilde{G})(\lambda)$ に対し，$\mu^{-1}(\lambda')$，$\mu^{-1}(\lambda'')$ を $N_{\lambda'}, N_{\lambda''}$ とすればこれらは M の閉部分多様体で，

$\lambda' \neq \lambda''$ ならば $N_{\lambda'} \cap N_{\lambda''} = \phi$ であり，しかもある $g \in \tilde{G}$ によって，$\rho(g) N_{\lambda'} = N_{\lambda''}$ となっている．つまり，$\mu^{-1}(\alpha(\tilde{G})(\lambda))$ は $\lambda' \in \alpha(\tilde{G})(\lambda) = \tilde{G}/\tilde{G}_\lambda$ をパラメーターにした $N_{\lambda'}$ の束（たば）のような構造をしている．このことを，$\tilde{G}/\tilde{G}_\lambda$ を底空間とし，N_λ をファイバーとする **ファイバー束** と呼んでいるが，$\mu^{-1}(\alpha(\tilde{G})(\lambda))$ はそういうものになっている．これは局所的には N_λ と $\tilde{G}/\tilde{G}_\lambda$ の開集合との直積空間であり，これを利用すれば $\mu^{-1}(\alpha(\tilde{G})(\lambda))$ が C^∞ 多様体であることが示される．しかし，一般には M の閉部分多様体とはならない．以下，$\tilde{N}_\lambda = \mu^{-1}(\alpha(\tilde{G})(\lambda))$ と略記することにする．

一般に，多様体 N に群 G が作用しているとき，その軌道 $G(p)$ を1点とみなして作る空間を **軌道空間** と呼ぶ．これは N の点 p, q が $g \in G$ によって $g(p) = q$ となるとき"同値"と呼んでその同値類の全体の空間のことである．軌道空間は $G \backslash N$ と書かれる．

そこで，上の N_λ, $\tilde{N}_\lambda$ にはリー群 $\tilde{G}_\lambda$, $\tilde{G}$ が作用しているから，軌道空間 $\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda$, $\tilde{G} \backslash \tilde{N}_\lambda$ を考えてみると次のことがわかる：

補題　$\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda = \tilde{G} \backslash \tilde{N}_\lambda$

証明　まず，$\tilde{N}_\lambda$ がどのように作られているかを見よう．$g \in \tilde{G}$ のとき，$\rho(g) N_\lambda$ は，$\rho(g) N_\lambda \cap N_\lambda \neq \phi$ ならば $\rho(g) N_\lambda = N_\lambda$ であり，そうなるのは $g \in \tilde{G}_\lambda$ の場合に限る．これを考えて，直積空間 $\tilde{G} \times N_\lambda$ に次のような同値関係を入れる：

$$(g, n) \underset{\lambda}{\sim} (g', n') \Longleftrightarrow h \in \tilde{G}_\lambda \text{ があり，} gh = g',\ \rho(h) n = n' \text{ となる．}$$

集合 $\tilde{N}_\lambda$ は $\tilde{G} \times N_\lambda$ を上の同値関係で分類した同値類の集合 $\tilde{G} \times N_\lambda / \underset{\lambda}{\sim}$ と同じである．$\tilde{G}$ は $(g, n) \mapsto (g'g, n)$ という右変換として自然に作用し，これが同値関係を保つことから，そのまま $\tilde{G} \times N_\lambda / \underset{\lambda}{\sim}$ への作用にもなっている．これが，$\tilde{G}$ の $\tilde{N}_\lambda$ への作用 ρ である．したがって，$\tilde{G} \backslash \tilde{N}_\lambda$ は，先に $\tilde{G} \backslash (\tilde{G} \times N_\lambda)$ を考えて，それから同値類を考えても同じことである．ところが，$\tilde{G} \backslash (\tilde{G} \times N_\lambda)$ は，任意の $g \in \tilde{G}$ に対して (g, n) と (e, n) とを同じ点とみなしてできる集合であり，ここで $\underset{\lambda}{\sim}$ を考えれば，任意の $h \in \tilde{G}_\lambda$ に対して $(e, n) \underset{\lambda}{\sim} (h, \rho(h) n)$ である．したがって，$\tilde{G} \backslash \tilde{N}_\lambda$ は $\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda$ と同じ集合となる．□

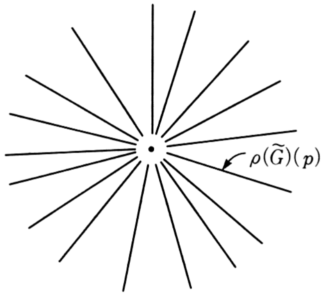


図 2 このようになっていると軌道空間は多様体ではなくなる.

$\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda = \tilde{G} \backslash \tilde{N}_\lambda$ を **簡約化された相空間** と呼ぶのであるがその訳は次節で解説する. しかし, 一般には $\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda$ は多様体にはならず, かなり複雑な集合となるので注意が必要である. 多様体になるには $\tilde{G}$ が $\tilde{N}_\lambda$ に非常に整然と作用していることが必要で, 図 2 のようなことが起るだけで多様体でなくなってしまう. しかし, 都合の良い仮定の下では $\tilde{G}_\lambda \backslash N_\lambda$ はシンプレクティック多様体になることが知られている.（次節参照）

6° 力学系の簡約（reduction）の原理

M をシンプレクティック多様体, $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ を M 上の C^∞ 級関数全体が作るポアソン環とする. M 上でハミルトン関数 $h_0 \in C^\infty(M)$ を考え, h_0 に支配される運動を考察するものとする. さらにリー群 G が M に正準変換として作用しており, h_0 は G-不変, つまり G という対称性を持っているものとする.

さらに, G のリー環 $\mathfrak{g}$ はハミルトン・ベクトル場となっており, $\mathfrak{g}$ に対して, これより 1 次元高い, $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ の部分リー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ が作られているものとしよう. モーメント写像 μ はこの $\tilde{\mathfrak{g}}$ を使って作られていた.

$\{h_0, \tilde{\mathfrak{g}}\} = \{0\}$ であるが, これを広げて,

$P = \{ f \in C^\infty(M) ; \{f, \tilde{\mathfrak{g}}\} = 0 \}$ （つまり $\rho(\tilde{G})$-不変な関数全体）

としよう. $C^\infty(M)$ の線形部分集合が積及び $\{\ ,\ \}$ の演算で閉じているとき, $C^\infty(M)$ の **ポアソン部分環** と呼ぶことにすれば, P はポアソン部分環になっている. 一般に $C^\infty(M)$ の部分集合 A に対し, $A^\perp$ なるポアソン部分環を

$$A^{\perp} = \{ f \in C^{\infty}(M)\,;\, \{f, A\} = \{0\} \}$$

と定義し，これを A の **可換子**（comutant）と呼ぶ．$P = \tilde{\mathfrak{g}}^{\perp}$ である．一般に $A^{\perp\perp} \supset A$, $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$ が成立する．$A^{\perp\perp}$ は A の **可換子閉包** と呼ばれている．

$Q = P^{\perp}$ とすれば，$Q \supset \tilde{\mathfrak{g}}$, $Q^{\perp} = P$ が成立している．そこで，このような組 (P, Q) が与えられたとして話をしよう．まず，P を使って M 上に同値関係 $\underset{P}{\sim}$ を，

$$p \underset{P}{\sim} q \iff \text{任意の } f \in P \text{ に対して } f(p) = f(q)$$

で定義する．これは，P の元を使って識別できないような点は同一とみなすということである．この同値関係による同値類の全体を M_P と書き，M から M_P への自然な射影を π_P と書く．P は M_P 上の関数から成るポアソン環である．全く同様に，M_Q, π_Q が定義される．

$\mathscr{Z} = P \cap Q$ とすると，$\{\mathscr{Z}, P\} = \{\mathscr{Z}, Q\} = \{0\}$, $\mathscr{Z} \supset \boldsymbol{R}$ であるが一般に $\mathscr{Z} = \boldsymbol{R}$ とはならない．$\mathscr{Z}$ を P, Q の **中心**（center）と呼ぶ．これは P のポアソン部分環だから，今度は M_P の点を $\mathscr{Z}$ で識別できないものは同じ点とみなすという方針で同値類に分け集合 $M_{\mathscr{Z}}$ と M_P から $M_{\mathscr{Z}}$ の上への射影 $\tilde{\pi}_P$ を得る．全く同じことが M_Q について行えるが，出てくる同値類の集合は M_P の場合と同一の $M_{\mathscr{Z}}$ である．M_Q から $M_{\mathscr{Z}}$ 上への射影を $\tilde{\pi}_Q$ と書く．図示すれば

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi_Q} & M_Q \\ {\scriptstyle \pi_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}_Q} \\ M_P & \xrightarrow{\tilde{\pi}_P} & M_{\mathscr{Z}} \end{array}$$

で $\tilde{\pi}_Q \pi_Q = \tilde{\pi}_P \pi_P$ が成立している．これを $\pi_{\mathscr{Z}}$ と書く．

さて，ハミルトン関数 h_0 が与えられこれが P の元であったとしよう．ハミルトン関数などと言う以上，正準方程式

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}p_t = \mathrm{ad}(h_0)(p_t)$$

を考えていてこれを解こうとしている訳である．

ところが，任意の $f \in Q$ に対して（$*$）の解 p_t は

$$\frac{d}{dt}f(p_t) = \{h_0, f\}(p_t) = 0$$

となるから，p_t に沿って f は一定となり，p_t と $p_{t'}$ とは Q の元では識別不能となる．したがって（$*$）の解 p_t に沿って，π_Q は一定，つまり $\pi_Q(p_t) = \pi_Q(p_0)$ となる．π_Q はモーメント写像にあたるものである．次のことに注意しよう：

補題 1 （$*$）を 初期点を任意に与えて解くことと，次の方程式（$**$）を初期関数を任意に与えて解くことは同等である：

$$(**) \qquad \frac{\partial}{\partial t}f_t = \{h_0, f_t\}$$

証明 $\varphi_t(p)$ を初期点が p であるような（$*$）の解とすると，（$**$）の解は初期関数 f に対して一意的に $f_t(p) = f(\varphi_t(p))$ で与えられる．逆に（$**$）を座標関数を初期関数として解けば，これが（$*$）の解を与える．□

任意の $g \in Q$ に対して $\{h_0, g\} = 0$ だから，（$**$）の解 f_t は

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_t, g\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t}f_t, g\right\} = \{\{h_0, f_t\}, g\} = \{h_0, \{f_t, g\}\}$$

をみたす．つまり，$\{f_t, g\}$ も（$**$）の解となる．（$**$）の解の一意性を使うと，初期関数 f_0 が $P = Q^\perp$ の元であれば，f_t も $Q^\perp$ の元であり続ける．これより，P で識別不能な 2 点を初期点とする（$*$）の解 p_t, q_t はやはり P で識別不能であり続ける．つまり，$\pi_P(p_0) = \pi_P(q_0)$ ならば $\pi_P(p_t) = \pi_P(q_t)$ であり，（$*$）の解曲線の全体は，集合 M_P 上に，ベクトル場の積分曲線の族が持っている性質と同じ性質を持った曲線族を定義する．荒く言えば方程式

(∗) を M_P に射影することができる．これを，形式的に

$$(***) \qquad \frac{d}{dt}\tilde{p}_t = \mathrm{ad}(h_0)(\tilde{p}_t), \qquad \tilde{p}_t \in M_P$$

と書けば，(∗∗∗) の解 (実は (∗) の解を射影したもの) に沿って $\tilde{\pi}_P$ は一定となる．したがって，“ 微分方程式 ” (∗∗∗) は M_P の部分集合 $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$, $m \in M_{\mathfrak{X}}$，の上で考えれば良いことになる．後で述べることだが，$\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ は大ていの場合，再びシンプレクティック多様体となる．$\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ を **簡約化された相空間** と呼び，$\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ 上に (∗∗∗) を作ることを力学系 (∗) の **簡約** と呼ぶ．

ここで，h_0 の代りに，任意に $f \in P$ をとって，上と同じ推論を行えば，“ 微分方程式 ”

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_t = \mathrm{ad}(f)(\tilde{q}_t), \qquad \tilde{q}_t \in M_P$$

の解に沿って $\tilde{\pi}_P$ はやはり一定となる．このことは，“ ベクトル場 ” $\mathrm{ad}(f)$ は $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ に “ 接している ” と表現されるが，これが言葉どうりの数学的意味を持つためには $\mathrm{ad}(f)(\tilde{p})$ というものが $\tilde{p} \in M_P$ において考えられるようになっていないといけないので，以下にそれを行ってから先へ進むことにする．

$\tilde{p} \in M_P$ に対して，

$$\mathscr{I}_{\tilde{p}} = \{ f \in P\,;\ \text{任意の } p \in \pi_P{}^{-1}(\tilde{p}) \text{ で } f(p) = 0 \}$$
$$\mathscr{I}_{\tilde{p}}{}^{(1)} = \{ f \in \mathscr{I}_{\tilde{p}}\,;\ \text{任意の } p \in \pi_P{}^{-1}(\tilde{p}) \text{ で } (df)_p = 0 \}$$

と定義し，$\mathscr{I}_{\tilde{p}}/\mathscr{I}_{\tilde{p}}{}^{(1)}$ を $T_{\tilde{p}}{}^*M_P$ と書き，M_P の $\tilde{p}$ における **余接空間** と呼ぶ．さらに $T_{\tilde{p}}{}^*M_P$ の相対空間を $T_{\tilde{p}}M_P$ と書き M_P の $\tilde{p}$ における **接空間** と呼ぶ．全く同じことが M_Q 上でも実行でき，$\tilde{q} \in M_Q$ に対して $T_{\tilde{q}}{}^*M_Q$, $T_{\tilde{q}}M_Q$ が定義できる．

P, Q の元はそれぞれ M_P, M_Q 上の関数と思えるが，$f \in P$, $h \in Q$ に対し

て自然に $(df)_{\tilde{p}} \in T_{\tilde{p}}{}^*M_P$, $(dh)_{\tilde{q}} \in T_{\tilde{q}}{}^*M_Q$ などが定義される．すると今度は，$M_{\mathscr{Z}}$ の元 m に対して，$\mathscr{Z}$ の部分集合として，

$$\mathscr{I}_m = \{ f \in \mathscr{Z} ;\ \text{任意の}\ \tilde{p} \in \tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)\ \text{で},\ f(\tilde{p}) = 0 \}$$

$$\mathscr{I}_m{}^{(1)} = \{ f \in \mathscr{I}_m ;\ \text{任意の}\ \tilde{p} \in \tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)\ \text{で},\ (df)_{\tilde{p}} = 0 \}$$

が考えられ，$T_m{}^*M_{\mathscr{Z}}$, $T_mM_{\mathscr{Z}}$ などが定義される．$\tilde{\pi}_P\pi_P = \tilde{\pi}_Q\pi_Q$ であるからこの定義は P の代りに Q を使って行っても全く同じ集合となる．

さて，$(-1, 1)$ から M_P (M_Q, $M_{\mathscr{Z}}$ でも同じこと) への写像 $\tilde{c}$ のことを M_P 内の **曲線** と呼び，$\tilde{c}(0)$ をその始点と呼ぶ．$\tilde{c}(t)$ が **C^∞ 級の曲線** であるとは，$\pi_P c(t) = \tilde{c}(t)$ となるような M 内の C^∞ 級曲線 $c(t)$ が存在する場合を言う*)．$\tilde{c}(t)$ が C^∞ 級曲線ならば任意の $f \in P$ に対して $f(\tilde{c}(t))$ は t について C^∞ 級であるが逆は一般には正しくない．

補題 2 $\tilde{c}(t)$ が M_P 内の C^∞ 級曲線のとき，$f \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\tilde{c}(t))$ は $T_{\tilde{c}(0)}{}^*M_P$ から $\boldsymbol{R}$ への写像を引起す．

証明 $f \in \mathscr{I}_{\tilde{p}}{}^{(1)}$ とすると，$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\tilde{c}(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)) = 0$ より明らか．□

上の補題で引起された写像を $T_{\tilde{p}}M_P$ の元と考えて，$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{c}(t)$ と書き，$\tilde{c}(t)$ の $t=0$ における **接ベクトル** **) と呼ぶ．

一方，$\tilde{p} \in M_P$, $f \in P$ を固定して，P から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $h \mapsto \{f, h\}(\tilde{p})$ を考えると，$\{f, h\}(p)$ が $(df)_p$, $(dh)_p$ にしか依存しないから，$\{f, h\}(\tilde{p})$ も $(df)_{\tilde{p}}$, $(dh)_{\tilde{p}}$ にしか依存せず，結局 $T_{\tilde{p}}{}^*M_P$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像を引起す．これを $\mathrm{ad}(f)(\tilde{p})$ と書き，$T_{\tilde{p}}M_P$ の元と考えることにする．

---

*) この部分が普通の多様体の場合と違う．C^∞ 級の曲線族を結局上から降してくることで定義している．

**) $T_{\tilde{p}}M_P$ の任意の元が，曲線の接ベクトルであるとは限らないので御用心！

以上によって，方程式($***$)は M_P 上で意味を持つことがわかった．

さらに，$\tilde{\pi}_P$: $M_P \to M_{\mathscr{Z}}$ なる写像を考えよう．$M_{\mathscr{Z}}$ 上の関数 f に対し，$f \circ \tilde{\pi}_P$ は M_P 上の関数であるが，これを $\tilde{\pi}_P{}^* f$ と書き，f の $\tilde{\pi}_P$ による **引戻し** と呼ぶ．$\tilde{\pi}_P{}^*$ は $\mathscr{Z}$ から P への写像を引起しているが，$\tilde{\pi}_P{}^*$: $\mathscr{Z} \to P$ は $\mathscr{Z}$ の元を自然に P の元と思う写像 i: $\mathscr{Z} \subset P$ でしかない．

補題 3 $\tilde{p} \in M_P$ に対して $\tilde{\pi}_P{}^* \mathscr{I}_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})} \subset \mathscr{I}_{\tilde{p}}$, $\tilde{\pi}_P{}^* \mathscr{I}^{(1)}_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})} \subset \mathscr{I}^{(1)}_{\tilde{p}}$

証明 最初のものは定義式を書けば明らかだから後の方を証明する．$\varphi \in \mathscr{I}^{(1)}_{\tilde{\pi}_P(\tilde{q})}$ とすると，φ は $\tilde{\pi}_Q{}^{-1}(\tilde{\pi}_P(\tilde{p}))$ 上で φ も $d\varphi$ も 0 となる $\mathscr{Z}$ の元であるが，これは任意の $q \in \pi_Q{}^{-1}\tilde{\pi}_Q{}^{-1}(\tilde{\pi}_P(\tilde{p})) = \pi_P{}^{-1}\tilde{\pi}_P{}^{-1}(\tilde{\pi}_P(\tilde{p}))$ で，$\varphi(q)=0$, $(d\varphi)_q = 0$ となる $\mathscr{Z}$ の元のことである．$\pi_P{}^{-1}(\tilde{p}) \subset \pi_P{}^{-1}\tilde{\pi}_P{}^{-1}(\tilde{\pi}_P(\tilde{p}))$ だからこれは $\varphi \in \mathscr{I}^{(1)}_{\tilde{p}}$ を意味している．□

上の補題により，$\tilde{\pi}_P{}^*$: $\mathscr{Z} \to P$ は，各 $\tilde{p} \in M_P$ に対し，

$$(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}{}^*:\quad T^*_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})} M_{\mathscr{Z}} \to T_{\tilde{p}}{}^* M_P$$

なる線形写像を引起していることがわかる．これの相対写像を，$(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}$: $T_P M_P \to T_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})} M_{\mathscr{Z}}$ と書き，$\tilde{\pi}_P$ の $\tilde{p}$ における **微分写像** と呼ぶ．

$\tilde{p} \in \tilde{\pi}_p{}^{-1}(m)$ に対して $(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}$ の核，

$$\mathrm{Ker}(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}} = \{ X \in T_{\tilde{p}} M_P ; \langle X, (D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}{}^* T_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})}{}^* M_{\mathscr{Z}} \rangle = 0 \}$$

を $\tilde{p}$ における $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ の **接空間** と呼ぶ．次の補題が $\mathrm{ad}(f)$ は $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ に接していると述べたことの数学的内容である：

補題 4 任意の $f \in P$, 任意の $\tilde{p} \in \tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ に対して，

$$\mathrm{ad}(f)(\tilde{p}) \in \mathrm{Ker}(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}.$$

証明は結局 $\dfrac{d}{dt}\tilde{q}_t = \mathrm{ad}(f)(\tilde{q}_t)$ の解曲線に沿って $\tilde{\pi}_P$ が一定であることを示すだけだから省略する．

$\mathscr{I}_{P,m}$ を $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ 上で 0 となる P の元全体とすると，$P \cdot \mathscr{I}_{P,m} \subset \mathscr{I}_{P,m}$ は自

明だが，上の補題により $\{P, \mathcal{I}_{P,m}\} \subset \mathcal{I}_{P,m}$ も成立する．つまり，$\mathcal{I}_{P,m}$ は P のポアソン環としてのイデアルである．また，$\mathcal{I}_{P,m} \cap \mathcal{Z}$ は $m \in M_{\mathcal{Z}}$ で 0 となる $\mathcal{Z}$ の元全体と一致し，したがって，$\mathcal{Z}/\mathcal{I}_{P,m} \cap \mathcal{Z} \cong \boldsymbol{R}$ となる．

また，$P/\mathcal{I}_{P,m}$ は自然に $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ 上の関数環と考えられるが P から自然に持ち込まれる積，$\{\ ,\ \}$-積でポアソン環になる．

一方，上のこととは別に，M_P の各点 $\tilde{p}$ において，

$$\mathrm{ad}(P)(\tilde{p}) = \{\, \mathrm{ad}(f)(\tilde{p})\,;\, f \in P\,\}$$

を考えれば前補題により $\mathrm{ad}(P)(\tilde{p}) \subset \mathrm{Ker}(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}$ ($\tilde{p}$ における $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ の接空間) である．そこで集合 M_P に次のような同値関係を導入する： $\tilde{p}, \tilde{q} \in M_P$ が同値 $\tilde{p} \cong \tilde{q}$ とは，M_P 内の C^∞ 級曲線 $\tilde{p}_t$ で，$\tilde{p}_0 = \tilde{p}$, $\tilde{p}_1 = \tilde{q}$ かつ $\dfrac{d}{dt}\tilde{p}_t \in \mathrm{ad}(P)(\tilde{p}_t)$ となるものがある場合を言う．パラメーター t の変更が自由であることに注目すればこれが同値関係であることの検証は容易である．

前補題を使えば，$\tilde{p} \cong \tilde{q}$ ならば $\tilde{\pi}_P(\tilde{p}) = \tilde{\pi}_P(\tilde{q})$ となること，つまり，$\mathcal{Z}$ の任意の元は $\cong$ による同値類上で一定であることが容易にわかる．

補題 5 逆に，P の元 f が $\cong$ による任意の同値類上で一定の値をとるならば，$f \in \mathcal{Z}$ である．

証明 任意の $h \in P$ に対し，$\mathrm{ad}(h)$ の積分曲線 p_t を M 上でとり，$\tilde{p}_t = \pi_P(p_t)$ とすれば，$\dfrac{d}{dt} f(\tilde{p}_t) = 0$ であるが，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\tilde{p}_t) = \{h, f\}(\tilde{p}_0)$$

だから，$\{P, f\} = \{0\}$ となり，$f \in \mathcal{Z}$ を得る． □

しかし，一般には $\mathcal{Z}$ の元による同値関係と，$\cong$ とは違ってしまう．これが話を面倒にする原因なのだが，多くの場合，ほとんどすべての $m \in M_{\mathcal{Z}}$，ほとんどすべての $\tilde{p} \in \tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ において次の性質 ⟨P⟩ が成立する：

⟨P⟩ $\mathrm{ad}(P)(\tilde{p}) = \{\, \tilde{p}$ における $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ の接空間 $\}$

$\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ の $\tilde{p}$ での接空間 $T_{\tilde{p}}\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ は $\mathrm{Ker}(D\tilde{\pi})_{\tilde{p}}$ で与えられるが，これは $(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}{}^* T_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})}{}^* M_{\mathfrak{X}}$ 上で0となる $T_{\tilde{p}}{}^* M_P$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像の全体である．そこで，$T_{\tilde{p}}{}^* M_P$ 内での $(D\tilde{\pi}_P)_{\tilde{p}}{}^* T^*_{\tilde{\pi}_P(\tilde{p})} M_{\mathfrak{X}}$ の補空間 $E_{\tilde{p}}{}^*$ を1つとり，これを $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ の余接空間 $T_p{}^*\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ と考える．次の定理が前の方で $\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ はほとんどシンプレクティック多様体であると述べた理由である：

定理　上の⟨P⟩がみたされているような点 $\tilde{p} \in \tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ において，$\{\ ,\ \}(\tilde{p})$ から引起される $E_{\tilde{p}}{}^* \times E_{\tilde{p}}{}^*$ から $\boldsymbol{R}$ への双線形写像は非退化である．

証明　$(df)_{\tilde{p}} \in E_{\tilde{p}}{}^*$ とする．$\{P, f\}(\tilde{p}) = \{0\}$ ならば⟨P⟩より $\langle T_{\tilde{p}}\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m), (df)_{\tilde{p}}\rangle = \{0\}$．$T_{\tilde{p}}\tilde{\pi}_P{}^{-1}(m)$ は $E_{\tilde{p}}{}^*$ の相対空間とみなせるから，これは $(df)_{\tilde{p}} = 0$ を意味する．□

7° Calogero（カロジェロ）系

モーメント写像の一般論は **4°**～**6°** に見られるように大変に難しいのだが，その難しさは群 G の作用が一般に極めて複雑であることによっている．したがって作用がはっきりしているような例では，さほど面倒なことは起きない．

$H(n)$ を $n \times n$ エルミート行列の全体，$H(n)^*$ をその相対空間とし，$H(n)$ の余接バンドル $T^*H(n)$ を自然に $H(n) \oplus H(n)^*$ と同一視し，これを自然にシンプレクティック多様体と思う．

$A \in H(n)$ に対して，$X \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AX))$（Reは実部を表わす）なる $H(n)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像を考え，これを $A^* \in H(n)^*$ とすると，$A \mapsto A^*$ は $H(n)$ から $H(n)^*$ への線形同形対応である．

$U(n)$ を $n \times n$ ユニタリー行列全体のなす群とし，これを $T^*H(n) =$

$H(n) \oplus H(n)^*$ に次のように作用させる：

（1）　$\rho(U)(A, B^*) = (UAU^{-1}, (UBU^{-1})^*), \qquad U \in U(n).$

$U(n)$ がリー群であり，上の作用が C^∞ 級であること等は言うまでもあるまい．

$U(n)$ のリー環は歪エルミート行列の全体だから $iH(n)$ ($i=\sqrt{-1}$) である．モーメント写像 μ: $H(n) \oplus H(n)^* \to (iH(n))^*$ を調べよう．そのためには $H(n) \oplus H(n)^*$ 上のポアソン括弧を具体的に書くことから始めねばならない．$f(X, Y^*)$ を $H(n) \oplus H(n)^*$ 上の C^∞ 級関数としたとき，線形写像

$$(d_1 f)_{(X,Y^*)}:\ H(n) \to \boldsymbol{R}, \qquad (d_2 f)_{(X,Y^*)}:\ H(n)^* \to \boldsymbol{R}$$

を

（2）
$$\begin{cases} (d_1 f)_{(X,Y^*)}(V) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(X+tV, Y^*) \\ (d_2 f)_{(X,Y^*)}(W^*) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(X, Y^*+tW^*) \end{cases}$$

で定義する．$H(n)^*$ の元 Y^* と $H(n)$ の元 X とで自然な内積 $Y^*(X)$ が作れるから，これを $\langle Y^*, X\rangle$ と書けば，

（3）
$$Y^*(X) = \langle Y^*, X\rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(YX)$$

である．これを用いて $f, g \in C^\infty(H(n) \oplus H(n)^*)$ に対し，$\{f, g\}$ を定義どおりに計算すれば，$H(n)^{**} = H(n)$ だから，

（4）　$\{f, g\}(X, Y^*)$
$$= \langle (d_1 f)_{(X,Y^*)}, (d_2 g)_{(X,Y^*)}\rangle - \langle (d_1 g)_{(X,Y^*)}, (d_2 f)_{(X,Y^*)}\rangle$$

となる．したがって，$\mathrm{ad}(f)(X, Y^*)$ は，

（5）
$$\mathrm{ad}(f)(X, Y^*) = \langle (d_1 f)_{(X,Y^*)},\ \ \rangle - \langle\ \ , (d_2 f)_{(X,Y^*)}\rangle$$

と書いて良い．

$U(n)$ は $H(n) \oplus H(n)^*$ に正準変換群として作用しているから，$iS \in iH(n)$ に対して，$\dot{\rho}(iS)$ を

(6)
$$\dot{\rho}(iS)(X, Y^*) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho(e^{itS})(X, Y^*)$$

で定義すれば，(1) を微分することにより

(7)
$$\dot{\rho}(iS)(X, Y^*) = (i[S, X], i[S, Y]^*)$$

を得る．$\dot{\rho}(iS)$ は $H(n) \oplus H(n)^*$ 上の正準ベクトル場だから，これの関数 $f \in C^\infty(H(n) \oplus H(n)^*)$ への作用は，

(8)
$$(\dot{\rho}(iS)f)(X, Y^*) = \langle (d_1 f)_{(X,Y^*)}, \ i[S, X]\rangle + \langle i[S, Y]^*, \ (d_2 f)_{(X,Y^*)}\rangle$$

となる．$\dot{\rho}(iS)$ がハミルトン・ベクトル場であることを見るには，上の iS に対して，$f_S \in C^\infty(H(n) \oplus H(n)^*)$ を，

(9)
$$f_S(X, Y^*) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, i[S, Y]X$$

と定義すると，$\mathrm{tr}[iS, X]Y + \mathrm{tr}\, X[iS, Y] = \mathrm{tr}[iS, XY] = 0$ だから

(10)
$$\mathrm{ad}(f_S)(X, Y^*) = \langle \ \ , \ i[S, X]\rangle + \langle i[S, Y]^*, \ \ \rangle$$

がわかり，$\dot{\rho}(iS) = \mathrm{ad}(f_S)$ であることがわかる．しかも

(11)
$$\{f_S, f_{S'}\} = f_{\frac{1}{i}[iS, iS']}, \qquad \frac{1}{i}[iS, iS'] \in H(n)$$

となり，中心拡大を行うまでもなく $\{f_S ; S \in H(n)\}$ は $\{\ ,\ \}$ に関して $C^\infty(H(n) \oplus H(n)^*)$ のリー部分環になっている．

モーメント写像 $\mu: H(n) \oplus H(n)^* \to (iH(n))^*$ は，f_S が $S \in H(n)$ に関して線形だからこれをそのまま $iH(n)$ 上の線形関数と思えば良いわけで，tr の性質 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を使って，

(12)
$$\begin{aligned}\mu(X, Y^*)(iS) &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, i[S, X]Y \\ &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(iSXY - X(iS)Y) \\ &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(XY(iS) - YX(iS)) \\ &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}[X, Y]iS\end{aligned}$$

が得られる．したがって，$H(n)^*$ と $(iH(n))^*$ を自然に同一視して，

(13)
$$\mu(X, Y^*) = [X, Y]^* \in H(n)^*$$

として良い．

$U(n)$ の余随伴作用は $Y^* \in H(n)^*$ に対し $\mathrm{Ad}(U)^* Y^* = (U^{-1}YU)^*$ で与えられるから，1つの軌道 $(\mathrm{Ad}(U(n))Y)^*$ 上では，行列 Y の固有値は変らない．そこで，$\{I^*\}$（$I=$ 単位元）以外の最も次元の低い軌道を調べると，$c \in \boldsymbol{R}$ として

$$W_c = cI + {}^t\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\ , \qquad \boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n) \in \boldsymbol{C}^n$$

の軌道が固有値の重複度が大きく次元が最小であることがわかる．$(\mathrm{Ad}(U(n))W_c)^*$ を書くには $\mathrm{Ad}(U(n))W_c$ を書けば十分だから，そちらを調べると，

$$\mathrm{Ad}(U(n))W_c = \{\, cI + {}^t\bar{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{w}\ ;\ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^n\ ;\ \|\boldsymbol{w}\| = 1 \,\} \quad (\subset H(n)) \tag{14}$$

であり，上の表示は $\boldsymbol{w}' = e^{i\theta}\boldsymbol{w}$ に対しては ${}^t\bar{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{w} = {}^t\bar{\boldsymbol{w}}'\cdot\boldsymbol{w}'$ となることより1次元の無駄があるので，$2(n-1)$ 次元の多様体になっていることがわかる．さらに

$$\mu^{-1}(W_c) = \{\, (X,\ Y^*)\ ;\ \frac{1}{i}[X,\ Y] = cI + {}^t\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v},\ \ X,\ Y \in H(n) \,\} \tag{15}$$

であることがわかる．この集合を $c=-1,\ \boldsymbol{v}=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ のときに詳しく調べて，簡約化された相空間 $\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ が $2n$ 次元のシンプレクティック多様体であることを見よう．ただし，

$$G_{W_{-1}} = \{\, U \in U(n)\ ;\ UW_{-1}U^{-1} = W_{-1} \,\}$$

である．

補題 1 任意の $(X,\ Y^*) \in \mu^{-1}(W_{-1})$ に対し，適当な $U \in G_{W_{-1}}$ を選べば $U^{-1}XU$ は対角行列にできる．

証明 $U' \in U(n)$ を選んで $U'^{-1}XU'$ が対角行列 D となるようにできることは明らか．$\boldsymbol{v}U' = \boldsymbol{w}$ とすれば

$$U'^{-1}\mu^{-1}(W_{-1})U' = \{(D, (U'^{-1}YU')^*)\,;\ \frac{1}{i}[D, U'^{-1}YU'] = -I + {}^t\bar{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{w}\}$$

となる．$D = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ として $\frac{1}{i}[D, U'^{-1}YU']$ を計算してみれば，対角成分が 0 となることがわかるから，$\boldsymbol{w}$ は $|w_i| = 1$ ($1 \leqq i \leqq n$) となることがわかり，$w_i = e^{i\theta_1}$ と書ける．そこで対角行列 $D' = \mathrm{diag}(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n})$ をとり，$U'' = U'D'$ としてやると，$D'^{-1}DD' = D$ だから，

$$U''^{-1}\mu^{-1}(W_{-1})U'' = \{(D, (U''^{-1}YU'')^*)\,;\ \frac{1}{i}[D, U''^{-1}YU''] = -I + {}^t\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\}$$

となり，$U'' \in G_{W_{-1}}$ で，$\mu^{-1}(W_{-1}) = U''^{-1}\mu^{-1}(W_{-1})U''$ を得る．　□

上の補題により $\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ を考えるときには，

$$\{(D, Y^*)\,;\ \frac{1}{i}[D, Y] = -I + {}^t\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\} \qquad (D \text{ は対角行列})$$

をまず考えれば良いことがわかる．$D = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ とし，$Y = (c_{ij})$ とすれば，上の式より，

$$(16) \qquad c_{ij} = \begin{cases} y_i \quad (\text{任意}) & (i = j) \\ \dfrac{\sqrt{-1}}{x_i - x_j} & (i \neq j) \end{cases}$$

を得る．したがって，$Y \in H(n)$ が確定するためには $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$) でなければならず，結局，

$$(17) \qquad G_{W_{-1}}/\mu^{-1}(W_{-1}) = \left\{\left(\begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & & c_{ij} \\ & \ddots & \\ \bar{c}_{ij} & & y_n \end{bmatrix}^*\right)\,; \right.$$
$$\left. c_{ij} = \frac{\sqrt{-1}}{x_i - x_j},\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n \right\}$$

であることがわかる．ただし，右辺は固有値の並べ方は $G_{W_{-1}}$ の作用でどのようにでも変えられることにより，大きさの順に並べたものである．これで，$G_{W_{-1}}\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ が $2n$ 次元の多様体であることがわかった．

6° の考え方をするために，$M = H(n) \oplus H(n)^*$，$\tilde{\mathfrak{g}} = iH(n)$，$P = \tilde{\mathfrak{g}}^\perp$ と

すれば，P は M 上の $\rho(U(n))$-不変な関数全体のなすポアソン環で，$f(X, Y^*) \in P$ とすれば $X = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$, $\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_n$ のときの値で f は決定されるが，そればかりでなく，$D = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ とし，$G_D = \{ U \in U(n) ; UDU^{-1} = D \}$ とすると，$f(D, Y^*)$ は G_D-不変，つまり $f(D, Y^*) = f(D, (U^{-1}YU)^*)$, $U \in G_D$, となる．したがって，**6°** の M_P は D 毎に違う集合を集めたもの，

$$M_P = \bigcup_{D \in \Delta_n} (\mathrm{Ad}(G_D) \backslash H(n)), \qquad \Delta_n = \{ (\delta_1, \cdots, \delta_n) \in \boldsymbol{R}^n ; \delta_1 \leqq \cdots \leqq \delta_n \}$$

と考えることができる．これは多様体ではない．

補題 2 $Q = P^{\perp}$ とすると，$Q = \{ \mu^* h ; h \in C^{\infty}(\tilde{\mathfrak{g}}^*) \}$ である．

証明 (8) = 0 が $f \in P$ のための必要十分条件だから，これと (4) とを比較すれば，$g \in Q$ の必要十分条件は，適当な $S \in H(n)$ が存在して，

$$((d_1 g)_{(X,Y^*)}, (d_2 g)_{(X,Y^*)}) = \left(\frac{1}{i}[S, Y]^*, \frac{1}{i}[X, S] \right), \qquad X, Y \in H(n).$$

つまり，

$$(18) \qquad \begin{aligned} (d_1 g)_{(X,Y^*)}(V) &= \mathrm{Re\,tr} \frac{1}{i}[S, Y] V, \\ (d_2 g)_{(X,Y^*)}(W^*) &= \mathrm{Re\,tr}\, W \frac{1}{i}[X, S] \end{aligned}$$

となることである．tr の性質より，これは

$$(19) \qquad \begin{aligned} (d_1 g)_{(X,Y^*)}(V) &= \mathrm{Re\,tr}\, i[V, Y]S, \\ (d_2 g)_{(X,Y^*)}(W^*) &= \mathrm{Re\,tr}\, i[X, W]S \end{aligned}$$

と同じである．これを，

$$(d_1 g)_{(X,Y^*)} = \langle S^*, i[\quad, Y] \rangle, \qquad (d_2 g)_{(X,Y^*)} = \langle i[X, \quad], S \rangle$$

と考える．$h \in C^{\infty}(H(n))$ に対して $g(X, Y^*) = h(i[X, Y])$ と定義し，$d_1 g$, $d_2 g$ を計算し，(19) と比較すれば，Q の元はこの形でなければならないことがわかる．同一視のしかたを思い出せば，補題のように書いても良い． □

$\tilde{\mathscr{Z}}$ を $H(n)$ 上の C^{∞} 関数で $\mathrm{Ad}(U(n))$-不変なもの全体とすれば，$\mathscr{Z} =$

$\mu^*\tilde{\mathscr{Z}}$ が $P\cap Q$ と一致する．$\tilde{\mathscr{Z}}, \mathscr{Z}$ はポアソン環で $\{\tilde{\mathscr{Z}}, \tilde{\mathscr{Z}}\}=\{0\}$, $\{\mathscr{Z}, \mathscr{Z}\}=\{0\}$ であるが，$\mu^*: \tilde{\mathscr{Z}}\to\mathscr{Z}$ は単射ではなく，$H(n)$ を，$\boldsymbol{C}\cdot I\oplus\frac{1}{i}[H(n), H(n)]$ と分解したとき，$\boldsymbol{C}\cdot I$ のみの関数となるものは μ^* の核となる．$SH(n)=\{A\in H(n)\,;\,\mathrm{tr}\,A=0\}$ とすれば，$SH(n)=\frac{1}{i}[H(n), H(n)]$ であり，$\tilde{\mathscr{Z}}\cong C^\infty(\boldsymbol{C}\cdot I)\oplus\mathscr{Z}$ である．

$\mathfrak{g}^*=(iH(n))^*$ 内の余随伴軌道は $\tilde{\mathscr{Z}}$ の可換環としての極大イデアルに対応する．$(\mathrm{Ad}(U(n))W_{-1})^*$ は (14) で与えられるが，この軌道上で 0 となる $\mathscr{Z}=P\cap Q$ の元全体を $\mathscr{I}_{W_{-1}}$ とすると $\mathscr{Z}/\mathscr{I}_{W-1}=\boldsymbol{C}$ である．$\mu^{-1}((\mathrm{Ad}(U(n))W_{-1})^*)$ は **5°** の $\tilde{N}_\lambda$ にあたるが，この集合上で 0 となる P の元全体を $\mathscr{I}$ とし，$P/\mathscr{I}$ を考える．P の元は $\rho(U(n))$-不変であったから，$P/\mathscr{I}$ は $\mu^{-1}((\mathrm{Ad}(U(n))W_{-1})^*)$ 上の $\rho(U(n))$-不変な関数全体を考えていることに対応する．したがって，$P/\mathscr{I}$ は $\rho(U(n))\backslash\mu^{-1}((\mathrm{Ad}(U(n))W_{-1})^*)$ 上の関数のなすポアソン環と考えて良い．補題 1 で使った $G_{W_{-1}}$ を使えば，**5°** の補題により，$P/\mathscr{I}$ は $\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ 上の関数と思って良い．

補題 3　任意の $\tilde{p}\in\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ で，**6°** の条件 ⟨P⟩ が成立する．

証明　(17) により $\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ は $2n$ 次元の多様体．$m=(\mathrm{Ad}(U(n))W_{-1})^*$ とすると，$\tilde{\pi}^{-1}(m)=\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ である．一方，**6°** の補題 4 より $\mathrm{ad}(P)(\tilde{p})\subset T_{\tilde{p}}\tilde{\pi}^{-1}(m)$ だから，$\mathrm{ad}(P)(\tilde{p})$ が $2n$ 次元以上であることを示す．まず，任意の 2 変数の多項式 F に対し，$f_F(X, Y^*)=\mathrm{Re\,tr}\,F(X, Y)$ は P の元だから，特に $f_k(X, Y^*)=\mathrm{Re\,tr}\,X^k$, $g_l(X, Y^*)=\mathrm{Re\,tr}\,(X^lY)$ も P の元である．(5) により $\mathrm{ad}(f_k)$, $\mathrm{ad}(g_k)$ を求めるのだが，そのために E_{ij} を (i, j) 成分のみが 1 で他は 0 の行列要素，$X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})$ とすると，$\mathrm{tr}\,(X^aAX^b)=\mathrm{tr}\,(X^{a+b}A)$ などを使って，

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{ad}(f_l)(X, Y^*)&=\sum_{i,j=1}^n l(\mathrm{Re\,tr}(X^{l-1}E_{ij}))\frac{\partial}{\partial y_{ij}}=l\sum_{i,j=1}^n x_{ji}{}^{(l-1)}\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\\ \mathrm{ad}(g_{l-1})(X, Y^*)&=-\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{Re\,tr}(X^{l-1}E_{ij}))\frac{\partial}{\partial x_{ij}}=-\sum_{i,j=1}^n x_{ji}{}^{(l-1)}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\end{aligned}\right.$$

を得る．ただし $x_{ji}^{(l-1)}$ は X^{l-1} の $(j,\ i)$ 成分である．特に，

$$\tilde{p}=(X,\ Y^*)=\left(\begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} y_1 & & c_{ij} \\ & \ddots & \\ \bar{c}_{ij} & & y_n \end{bmatrix}\right) \qquad \text{((17) 参照)}$$

においては $x_{ji}^{(l-1)}=x_i^{l-1}\delta_{ij}$ となる．$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について (20) を書いてみれば $x_1<x_2<\cdots<x_n$ だから，

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x_1 & \cdots\cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

を使って $2n$ 個の独立なベクトルが得られる． □

上の補題と，**6°** の定理により $\tilde{\pi}^{-1}(m)$ がシンプレクティック多様体となることがわかる．

そこで，$H(n)\oplus H(n)^*$ 上のハミルトン関数として，$h(X,\ Y^*)=\mathrm{tr}\,Y^2$ を考えてみると，h に支配される運動は，$H(n)\oplus H(n)^*$ 上では極めて単純で，正準方程式は，

$$(21) \quad \frac{d}{dt}x_{ij}=-y_{ij}, \qquad \frac{d}{dt}y_{ij}=0 \qquad (\text{解は } x_{ij}(t)=x_{ij}+t\,y_{ij})$$

となる．ところが，$h\in P$ だから **6°** で述べた簡約の手続きによって (21) は $\tilde{\pi}^{-1}(m)=\rho(G_{W_{-1}})\backslash\mu^{-1}(W_{-1})$ 上の方程式だと思うことができる．この上で書くと h は

$$(22) \qquad h(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\sum_{i\neq j}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}$$

になる．つまり (21) は $\tilde{\pi}^{-1}(m)$ 上に制限して考えると (22) のハミルトン関数に支配される運動となる．(22) は実数直線上に質量 1 の質点が n 個あるとし，ポテンシャル関数を $\sum_{i,j}(x_i-x_j)^{-2}$ で与えた運動になっている．

(22) から出発して正準方程式を作るとかなり複雑に見える連立方程式となるが，カロジェロ系の面白いところは，変数の数を減らすのではなく逆に

増やしてやると単純な方程式になってしまうというところで，この意味では，「力学系の簡約」は必ずしも物事を単純化することにはなっていないのである．

この考え方は，場の理論では特に重要で，一見複雑そうに見えているものは，束縛をとり払ってみれば単純なものであるが，それが「複雑な所に簡約化」されているのだと考えることもできるのである．

なお，この節で論じたような例は他にも二，三知られている．詳しくは次の文献を参照してもらいたい：

J. Moser, Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations, Advances in Mathematics 16, 1975, 197-220.

第 II 部

場の古典幾何学から量子場へ

第 I 部では点集合としての空間描像に立って，ひたすら「点の運動」を扱った．これは数学的には常微分方程式を扱うことを意味するが，力学系の簡約等を通じて，点の概念が絶対的なものではなくかなり便宜的なものであることも知ることになったと思う．

実は，力学がその理論の中から「力」という概念を消し去る方向へと進んだように，現代幾何学も理論の中から「点」の概念を消し去る方向へと進んでいるのである．この大きな流れはこれまであまり意識的に述べられたことはないが，大切な視点である．

この方向へ進むときの最大の障害は，「点概念を消し去って，どのようにして運動を考えるのか，特に変分原理をどのように考えたらよいのか？」という問題である．

第1章　関数環の deformation（変形）

点概念を消し去るといっても一気にそんなことができるわけではないので，この章でも点の概念は色濃く残っている．しかし，それは次第に主役の座を降り間接的な役割りへと変化してゆく．

1° 可換関数環と点

M を m 次元 C^∞ 級多様体とする．これは点集合として定義されてきたものである．$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体のなす可換環とする．定義の順番から言えば M があるから $C^\infty(M)$ が考えられるのであるが，この順序を逆にして，まず，$C^\infty(M)$ なる可換環が与えられたと考えてみよう．ここから M をどのようにして作り出せば良いのだろうか？　つまり，$C^\infty(M)$ という可換代数の代数的性質だけから M を再構成するにはどうすれば良いのだろうか．話を簡単にするためにこの節での M はコンパクトと仮定して，いくつかの考え方を説明しよう．

(A)　$f\in C^\infty(M)$ に対して $p\in M$ での値を考えるということは，f に対して実数値 $f(p)$ を対応させる写像であると考えられるから，これを φ_p: $C^\infty(M)\to \boldsymbol{R}$ と書こう．φ_p は $C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ の上への，環としての準同形写像である．

補題 1 ψ を $C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ の上への準同形写像とすると，ψ に対して M の点 p がただ 1 つ定まり，$\psi=\varphi_p$ となる*).

証明 $\mathscr{I}=\operatorname{Ker}\psi$ とすると，$\mathscr{I}$ は $C^\infty(M)$ のイデアルで，$C^\infty(M)/\mathscr{I}\cong\boldsymbol{R}$ となる．$\mathscr{I}$ に対してある点 p がみつかって $\varphi_p(\mathscr{I})=\{0\}$ となれば，$\mathscr{I}\subset\operatorname{Ker}\varphi_p$ だから $C^\infty(M)/\operatorname{Ker}\varphi_p\cong\boldsymbol{R}$ と合わせて，$\mathscr{I}=\operatorname{Ker}\varphi_p$，したがって $\psi=\varphi_p$ が得られる．

$\varphi_p(\mathscr{I})=\{0\}$ となるような p がないものとして矛盾を導こう．この仮定の下では任意の $p\in M$ に対して，$f_p\in\mathscr{I}$ で $f_p(p)>0$ となるものがなければならない．f_p は連続だから，p の開近傍 U_p 上で $f_p>0$ として良い．M の開被覆 $\{U_p\}_{p\in M}$ を考えると，M はコンパクトだから，$\{U_p\}_{p\in M}$ の細分 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で Λ が有限なものがとれる．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，$V_\lambda\subset U_p$ なる U_p を 1 つとり f_p を f_λ と書く．V_λ 上で $f_\lambda>0$ であり，$f_\lambda\in\mathscr{I}$ である．$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分解を $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とし，$f=\sum_\lambda\phi_\lambda f_\lambda$ とすれば $f\in C^\infty(M)$ であり，作り方から M 上で $f>0$ となる．$\phi_\lambda f_\lambda\in\mathscr{I}$ で Λ が有限集合だから，$f\in\mathscr{I}$ であり，$1=\dfrac{1}{f}\cdot f\in\mathscr{I}$ となる．したがって，$\mathscr{I}=C^\infty(M)$ となり，$C^\infty(M)/\mathscr{I}\cong\boldsymbol{R}$ に矛盾する．

$\mathscr{I}=\operatorname{Ker}\varphi_p=\operatorname{Ker}\varphi_q$ なら $p=q$ であることは容易にわかる． □

上の補題によれば M の点というものは $C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ の上への準同形写像のことだと解釈できる．

(**B**) ほとんど同じことだが，$C^\infty(M)$ の極大イデアルを点と考えることもできる．$p\in M$ に対して，$\mathscr{I}_p=\operatorname{Ker}\varphi_p$ とすると，$\mathscr{I}_p$ は $C^\infty(M)$ のイデアルで $\mathscr{I}_p\neq C^\infty(M)$ であり，この性質を持つイデアルの中では極大である．つまり，$\mathscr{I}_p\subset\mathscr{I}\subsetneqq C^\infty(M)$ なるイデアル $\mathscr{I}$ は $\mathscr{I}=\mathscr{I}_p$ となってしまう．逆に次の補題も成立する：

補題 2 $\mathscr{I}$ を $C^\infty(M)$ のイデアルで $\mathscr{I}\neq C^\infty(M)$ であり極大なものとす

*) M がコンパクトという仮定は，$C^\infty(M)$ に C^∞-位相と呼ばれる位相を入れ ψ を連続とすれば取除いて良い．

ると，$\mathscr{I}$ に対して $p \in M$ がただ1つ定まり，$\mathscr{I}=\mathscr{I}_p$ となる．

証明　$\mathscr{I} \subset \mathscr{I}_p$ となる p が見つかれば極大性より $\mathscr{I}=\mathscr{I}_p$ となるから，このような p がないとして矛盾を出せば良い．この仮定の下では任意の $p \in M$ に対して $f_p \in \mathscr{I}$ で $f_p(p)>0$ となるものがなければならないから，前補題と全く同様にして，$1 \in \mathscr{I}$ が得られ $\mathscr{I}=C^\infty(M)$ となって矛盾となる．□

(**C**)　上のようにして $C^\infty(M)$ の方から M の点が再構成できるのであるが，良く見ると，補題1，2の証明の中には C^∞ 級関数という性質はどこにも使われておらず，使われているのは $f \in C^\infty(M)$ の連続性だけだということがわかる．したがって，補題1，2は M が C^0 級多様体（位相多様体）の場合にも連続関数全体の環 $C^0(M)$ を考えれば成立する．しかし，$C^\infty(M)$ について次のことも成立する．

定理　2つのコンパクトな C^∞ 級多様体 M, M' において，$C^\infty(M)$ と $C^\infty(M')$ とが環として同形となるための必要十分条件は M と M' とが C^∞ 級同相となることである*)．

証明　M と M' とが C^∞ 級同相なら $C^\infty(M)$ と $C^\infty(M')$ が同形ということは明らかであろうから逆を証明する．Φ を $C^\infty(M')$ から $C^\infty(M)$ の上への同形写像とする．$p' \in M'$ に対して，$\mathscr{I}_{p'}=\mathrm{Ker}\,\varphi_{p'}$ を考え，$\Phi(\mathscr{I}_{p'})$ を作ると，Φ が同形写像だから，$\Phi(\mathscr{I}_{p'})$ は $C^\infty(M)$ の極大イデアルであり，補題2により，$p \in M$ がただ1つ見つかって，$\Phi(\mathscr{I}_{p'})=\mathscr{I}_p$ となる．

$\psi(p')=p$ と定義すると，ψ は M' から M への写像であるが，Φ の性質より，ψ: $M' \to M$ は全単射となることが容易にわかる．$\Phi(\mathscr{I}_{p'})=\mathscr{I}_{\psi(p')}$ である．

ところで，$f \in C^\infty(M')$ に対して，f を $C^\infty(M)/\mathscr{I}_{p'}$ に射影したものを $\tilde{f}_{p'}$ とすると，$\tilde{f}_{p'}=f(p')\cdot 1$ である．このことは $\Phi(f)$ についても同じだから，$\Phi(f)\tilde{_p}=\Phi(f)(p)\cdot 1$ であるが，Φ が $C^\infty(M')/\mathscr{I}_{p'} \cong \boldsymbol{R}$ から $C^\infty(M)/\mathscr{I}_{\psi(p')} \cong \boldsymbol{R}$ への同

---

*)　$C^\infty(M)$，$C^\infty(M')$ に C^∞-位相を入れ位相環としての同形を考えるならばコンパクトという仮定は取除ける．

形写像を引起しているのだから，$\Phi(f)(\psi(p'))=f(p')$ でなければならないことがわかる．つまり，$\Phi(f)(p)=f(\psi^{-1}(p))$ が任意の $f\in C^\infty(M')$ について成立する．f を M' 上の局所座標関数 x^i にして考えて見れば，$x^i(\psi^{-1}(\cdot))$ が C^∞ 級関数になるということは，ψ^{-1}: $M\to M'$ が C^∞ 級の写像ということに外ならない．Φ の代りに Φ^{-1} で考えれば ψ 自身も C^∞ 級ということになるから，これで M と M' とが C^∞ 級同相であることが示せた． □

上の定理によれば，M の点を再構成するまでは C^∞ 級ということは使っていないのだが，$C^\infty(M)$ の代数的構造が完全に C^∞ 級多様体としての M を決定していることがわかる．別の言葉で言えば，C^∞ 級多様体としての M の情報はすべて $C^\infty(M)$ の代数構造の中に入っているのである．

では一体 $C^0(M)$ と $C^\infty(M)$ とはどの位違うのだろうか？　もう少し一般に，ある可換環 $\mathscr{A}$ が一体どういう性質を持っていたら $\mathscr{A}=C^\infty(M)$ となるような M が見つかるのだろうか？

実はこのような，$C^\infty(M)$ の特徴付けの問題はほとんど何もわかっていないのであるが，$C^\infty(M)$ の1つの性質として，これがたくさんの **微分** (derivation) を持っていることがあげられる．微分とは，$C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への線形写像 X で，

$$X(fg)=(Xf)\cdot g+fXg,\qquad f,\ g\in C^\infty(M)$$

なる性質を持ったものである．第I部 2章 **7°** の定理の証明をもう一度読み直せば，次のことは明らかであろう：

補題 3　X: $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ が微分であるための必要十分条件は，X が C^∞ 級接ベクトル場であることである．

$\mathfrak{X}(M)$ を $C^\infty(M)$ の微分の全体（つまり C^∞ 級接ベクトル場全体）としよう．これが，リー括弧積 [,] に関して無限次元のリー環になっていることは前に述べたとおりである．

2° 可換環の変形 (deformation) としてのポアソン環

前章まで，力学系に関連してポアソン多様体とかポアソン環を扱ってきたのであるが，実は，ポアソン環を考えるということは，可換環 $C^\infty(M)$ を deform (変形) して非可換な環にして考えるのと同じことなのである.

M を C^∞ 級多様体とし，$C^\infty(M)$ を M 上の実数値の C^∞ 級関数の全体とする. これとは別に形式的に (全く何の意味も持たせないで) 記号 ν を導入し，$C^\infty(M)$ の元を係数とする形式的なベキ級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \nu^i f_i = f_0 + \nu f_1 + \cdots + \nu^n f_n + \cdots, \qquad f_i \in C^\infty(M)$$

の全体を考え，これを $C_\nu^\infty(M)$ とする. ν は $C_\nu^\infty(M)$ のすべての元と可換，$\nu\tilde{f} = \tilde{f}\nu$，であるとし，$\nu^i \nu^j = \nu^{i+j}$ と約束すれば，$C_\nu^\infty(M)$ は通常の和，積によって可換代数となる.

$C_\nu^\infty(M)$ に，可換ではないが，結合律をみたす代数構造を入れることを考えよう. こういう代数ができたとしてその積を $\tilde{f} * \tilde{g}$ と書くことにし，この代数においても ν はすべての元と可換，$\nu * \tilde{f} = \tilde{f} * \nu$ であるとすれば，こういう代数の構造は，$f, g \in C^\infty(M)$ に対して

(1) $\quad f * g = P_0(f, g) + \nu P_1(f, g) + \cdots + \nu^l P_l(f, g) + \cdots,$

と書いたときの $P_l(f, g)$ を全部与えることによってきめられる. ただし，P_l は $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ から，$C^\infty(M)$ への双線形写像で，結合律をみたすためと 1 が単位元であるためには，

(2)
$$\sum_{k+l=m} P_l(P_k(f, g), h) = \sum_{k+l=m} P_l(f, P_k(g, h)), \qquad m \geqq 0$$
$$P_m(f, 1) = P_m(1, f) = 0 \quad (m \geqq 1), \quad P_0(f, 1) = P_0(1, f) = f,$$

が成立していなくてはならない.

定義 $P_0(f, g) = f \cdot g$ (通常の積) のとき，$(C_\nu^\infty(M), *)$ を $C^\infty(M)$ の **変形** (deformation) と呼び，このときの ν を **変形のパラメーター** と呼ぶ.

このような変形がどの位可能であるかを考察しよう．まず，

$$(3)\qquad [f,\, g] = f * g - g * f, \qquad f \circ g = \frac{1}{2}(f * g + g * f)$$

とおく．[,] によって $C_\nu^\infty(M)$ はリー環になることは明らかだが，○に関しては，$C_\nu^\infty(M)$ は**ジョルダン環**と呼ばれるものになる．これは一般には結合律をみたさない（つまり，$f \circ (g \circ h) \neq (f \circ g) \circ h$ ）代数であるが，任意の $f,\, g \in C_\nu^\infty(M)$ について，

$$(4)\qquad f \circ (g \circ f^2) = (f \circ g) \circ f^2 \qquad (\text{ただし，} f^2 = f \circ f)$$

が成立するような代数である．次の等式は自明であろう：

$$(5)\qquad f * g = f \circ g + \frac{1}{2}[f,\, g].$$

この分解と調子を合わせて，

$$(6)\qquad P_1^+(f,\, g) = \frac{1}{2}(P_1(f,\, g) + P_1(g,\, f)),$$

$$P_1^-(f,\, g) = \frac{1}{2}(P_1(f,\, g) - P_1(g,\, f))$$

とおくと，結合律の条件 (2) を $m=1$ のときに使った式

$$(7)\qquad P_1(fg,\, h) + P_1(f,\, g)h = P_1(f,\, gh) + fP_1(g,\, h), \qquad f,\, g,\, h \in C^\infty(M)$$

より，同じ等式が P_1^+, P_1^- についても成立する，つまり，

$$(8)\qquad P_1^\pm(fg,\, h) + P_1^\pm(f,\, g)h = P_1^\pm(f,\, gh) + fP_1^\pm(g,\, h) \qquad (\text{複号同順})$$

が成立する．

ところで，一般に結合律をみたす代数では

$$(9)\qquad \begin{aligned} &[\tilde f,\, \tilde g * \tilde h] = [\tilde f,\, \tilde g] * \tilde h + \tilde g * [\tilde f,\, \tilde h] && (\text{ライプニッツ恒等式}) \\ &[\tilde f,\, [\tilde g,\, \tilde h]] + [\tilde g,\, [\tilde h,\, \tilde f]] + [\tilde h,\, [\tilde f,\, \tilde g]] = 0 && (\text{ヤコビ恒等式}) \end{aligned}$$

が成立する．また，次の式も容易に確かめられる：

$$(10)\qquad [\tilde f,\, \tilde g \circ \tilde h] = [\tilde f,\, \tilde g] \circ \tilde h + \tilde g \circ [\tilde f,\, \tilde h]$$

$$(\tilde{f}\circ\tilde{g})\circ\tilde{h}-\tilde{f}\circ(\tilde{g}\circ\tilde{h})=-\frac{1}{4}[\tilde{g},[\tilde{h},\tilde{f}]]. \tag{11}$$

(9) 式を (2) を使って，$f, g, h \in C^\infty(M)$ のとき $m=1, 2$ について計算すると，$P_0(f, g)=fg$ だから，

$$\begin{aligned} &P_1^-(f, gh)=P_1^-(f, g)h+gP_1^-(f, h) \\ &P_1^-(f, P_1^-(g, h))+P_1^-(g, P_1^-(h, f))+P_1^-(h, P_1^-(f, g))=0 \end{aligned} \tag{12}$$

を得る．((10)，(11) からは $P_2^\pm$ の入った式が得られる．) したがって，$P_1^-(f, g)=\frac{1}{2}\{f, g\}$ とおき，$C^\infty(M)$ 上の括弧積と思うことにすれば，これで $C^\infty(M)$ はポアソン環になることがわかる．つまり，$C^\infty(M)$ の変形 $(C_\nu^\infty(M), *)$ の第1項 P_1 の歪対称部分 P_1^- を使って，(M, P_1^-) はポアソン多様体となるのである．後の方で証明することだが，実は $C^\infty(M)$ に入るポアソン環の構造 $\{\ ,\ \}$ は，たいていの場合 $C^\infty(M)$ の変形の第1項の歪対称部分として書けることがわかっている．

一方，双線形写像 $Q: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ が **双微分** (biderivation) であるとは，任意の $f, g, h \in C^\infty(M)$ に対し，

$$\begin{aligned} &Q(f, gh)=Q(f, g)h+gQ(f, h), \\ &Q(fg, h)=fQ(g, h)+Q(f, h)g \end{aligned} \tag{13}$$

が成立する場合を言うのであるが，任意の双微分は (7) をみたす．P_1^- は双微分である．しかし，双微分 Q の歪対称部分が (12) の後半のヤコビの恒等式をみたすとは限らない．

さらに，$L: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ を任意の線形写像とし，

$$Q(f, g)=L(fg)-fL(g)-L(f)g \tag{14}$$

とおけば，Q は対称な双線形写像で，(7) をみたす．

これまでは $C_\nu^\infty(M)=\prod_{i=0}^{\infty}\nu^i C^\infty(M)$ の書き方を固定して話をしてきたが，今度は $C_\nu^\infty(M)$ は固定するが，これを分解するしかたを変えて $*$-積を表現してみよう．

$L: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ を任意の線形写像とする．$\tilde{f}=\sum_{i=0}^{\infty}\nu^i f_i \in C_\nu^\infty(M)$

に対し，$L\tilde{f}=\sum_{i=0}^{\infty}\nu^i Lf_i$ と定義すれば，L は $C_\nu^\infty(M)$ から $C_\nu^\infty(M)$ への線形写像と思うことができる．さらに，

$$(1+\nu L)\tilde{f}=\tilde{f}+\nu L\tilde{f} \tag{15}$$

と定義すれば，$1+\nu L$ の逆写像 $(1+\nu L)^{-1}$ は

$$(1+\nu L)^{-1}=1-\nu L+\nu^2L^2-\cdots+(-\nu)^l L^l+\cdots \tag{16}$$

で与えられるから，$1+\nu L$：$C_\nu^\infty(M)\to C_\nu^\infty(M)$ は線形同形写像となる．$\tilde{C}^\infty(M)=(1+\nu L)C^\infty(M)$ と書いてみると，

$$C_\nu^\infty(M)=\prod_{i=0}^{\infty}\nu^i\tilde{C}^\infty(M) \tag{17}$$

であるから，これまでとは違う $C_\nu^\infty(M)$ の分解になっていることがわかる．$\tilde{f}=\sum_{i=0}^{\infty}\nu^i f'_i$，$f'_i\in\tilde{C}^\infty(M)$ を用いて $C_\nu^\infty(M)$ の積を書くには，$f', g'\in\tilde{C}^\infty(M)=(1+\nu L)C^\infty(M)$ に対して，

$$f'*g'=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l P'_l(f', g'), \qquad P'_l(f', g')\in\tilde{C}^\infty(M) \tag{18}$$

と書いて $P'_l(f', g')$ を求めれば良い．P'_l をもとの P_l を用いて書くには，$f'=(1+\nu L)f$，$g'=(1+\nu L)g$ とおき，

$$(1+\nu L)^{-1}((1+\nu L)f*(1+\nu L)g) \tag{19}$$

を計算すれば良い．これを実行すると，

$$P'_1(f', g')=P_1(f', g')-(L(f'g')-f'L(g')-L(f')g') \tag{20}$$

が得られる．ただし，$f'g'$ などは $C_\nu^\infty(M)$ における通常の可換積で，P_1 は $C_\nu^\infty(M)\times C_\nu^\infty(M)$ から $C_\nu^\infty(M)$ への双線形写像として自然に拡張してある．

上のような操作は，$C_\nu^\infty(M)$ の積の構造を別の座標系で表示しているようなものだから，この考え方を使って，P_1 の対称部分を消し去ることができないものか考えてみよう．

まず，M が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U の場合には次が成立する：

補題 1　$M = U$ の場合には，$Q\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ なる線形写像を上手に作ると，$Q(fg) - fQ(g) - Q(f)g = P_1^+(f, g)$ となるようにできる．つまり，P_1^+ の項は $C_\nu^\infty(U)$ の分解を変えると消すことができる．

証明　$x_1, \cdots, x_n$ を U 上の座標系とする．U の点 p の座標を $(a_1, \cdots, a_n)$ とし，$f \in C^\infty(U)$ に対して

$$f_i^{(p)} = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

とおくと，$(f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)})/(x_i - a_i) \in C^\infty(U)$ であり，

$$f(\boldsymbol{x}) - f(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i}(x_i - a_i)$$

となる．

$$Q(f)(p) = \sum_{i=1}^{n-1} P_1^+\left(\frac{f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i},\ x_i - a_i\right)$$

とおけば，

$$\begin{aligned} Q(fg)(p) = \sum_{i=1}^{n-1}\Biggl\{ & P_1^+\left(f_i^{(p)}\frac{g_i^{(p)} - g_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i},\ x_i - a_i\right) \\ & + P_1^+\left(g_{i+1}^{(p)}\frac{f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i},\ x_i - a_i\right)\Biggr\}(p) \end{aligned}$$

$$fQ(g)(p) = \sum_{i=1}^{n-1} f(p)P_1^+\left(\frac{g_i^{(p)} - g_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i},\ x_i - a_i\right)(p)$$

$$Q(f)g(p) = \sum_{i=1}^{n-1} P_1^+\left(\frac{f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i},\ x_i - a_i\right)(p)g(p)$$

だから，(8) を用いて $(Q(fg) - fQ(g) - Q(f)g)(p)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1}\{P_1^+(f_i^{(p)},\ g_i^{(p)} - g_{i+1}^{(p)}) + P_1^+(g_{i+1}^{(p)},\ f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)})\}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\{P_1^+(f_i^{(p)},\ g_i^{(p)}) - P_1^+(f_{i+1}^{(p)},\ g_{i+1}^{(p)})\}(p) \\ &= P_1^+(f,\ g)(p) - P_1^+(f_n^{(p)},\ g_n^{(p)}) \end{aligned}$$

を得る．ところが $P_1^+(1, h) = 0$ より，$P_1^+(f_n^{(p)}, g_n^{(p)}) = 0$ だから Q が求めるものである．□

上の補題を使って多様体 M 上で考えるのだが，一般的には難しいので，P_1^+ が次の性質を持つ場合に考える：

(21) $$\operatorname{supp} P_1^+(f,\ g) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$$

ただし，$\operatorname{supp} F$ は関数 F の **台** (support)を意味する．

定理 P_1^+ が (21) の性質を持てば，Q: $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ をうまく選んで，$Q(fg) - fQ(g) - Q(f)g = P_1^+(f,\ g)$ とできる．

証明 M を座標近傍 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で覆う．P_1^+ が (21) の性質を持つから，$P_1^+(f,\ g)|U_\lambda$ は U_λ の外での f, g の値には無関係で $f|U_\lambda$, $g|U_\lambda$ だけできまることがわかる．各 U_λ 上で，$\dfrac{f_i^{(p)} - f_{i+1}^{(p)}}{x_i - a_i}$，$x_i - a_i$ などを M 上の関数になるように拡張して考えれば，前補題により，Q_λ: $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ なる線形写像で，$Q_\lambda(fg) - fQ_\lambda(g) - Q_\lambda(f)g = P_1^+(f,\ g)|U_\lambda$ が任意の $f, g \in C^\infty(M)$ で成立するようにできる．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in M}$ が局所有限であるように最初から選んでおき，これに従属する1の分解を $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ として，

$$Q(f) = \sum_\lambda \phi_\lambda Q_\lambda(f), \qquad f \in C^\infty(M)$$

とすると，

$$\begin{aligned} Q(fg) - fQ(g) - Q(f)g &= \sum_\lambda \phi_\lambda (Q_\lambda(fg) - fQ_\lambda(g) - Q_\lambda(f)g) \\ &= \sum_\lambda \phi_\lambda P_1^+(f,\ g) = P_1^+(f,\ g) \end{aligned}$$

となる． □

上の定理により，ほとんどの場合に $P_1^+(f, g)$ の項は適当に $C_\nu^\infty(M)$ の分解を変えることで，消してしまうことができる．したがって，$C^\infty(M)$ の変形に現われる第1項は P_1^- が本質的なものである．$(M,\ P_1^-)$ はポアソン多様体であったことをもう一度思い出してもらいたい．

3° 無限小部分の代数と代数束

$C^\infty(M)$ の変形 $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ を考えるのだが，前節の定理をふまえて，こ

の節では始めから $P_1^+=0$ として話をする．当然 P_1^- が問題になるのだが，$(M,\ P_1^-)$ がポアソン多様体だから，前章の記号に合わせるため $2P_1^-(f,\ g)=-\{f,\ g\}$ という書き方も併用することにする．

M の点 p を任意にとって固定し，p を原点とするような局所座標系 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ を考える．任意の $f\in C^\infty(M)$ に対し，f を $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ で表示して原点の所でテイラー展開したものを記号で $\tau_{p,x}(f)$ と書く．多重添字を使えば，

$$\tau_{p,x}(f)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(0)\,\boldsymbol{x}^\alpha$$

である．$x_1,\ \cdots,\ x_n$ に関する形式的ベキ級数 $\sum a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ の全体を $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ とすると，$\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ は自然な和と積とで可換代数となり，$\tau_{p,x}$ は $C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ の準同形写像となる．実は $\tau_{p,x}$ の像は $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ 全体になることがわかっている．*) Ker $\tau_{p,x}$ の元を点 p で **平坦**（flat）な関数と呼ぶ．これは点 p ですべての階数の偏微係数も 0 となるような関数である．$C^\infty(M)/\mathrm{Ker}\,\tau_{p,x}$ は $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ と同形であるが，これを $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ と書く．さらに，$C_\nu^\infty(M)$ にならって，$\nu^l\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ 全部の直積 $\prod_{l=0}^{\infty}\nu^l\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ を，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ と書くことにする．

$(C_\nu^\infty(M),\ *)$ の積をテイラー展開を通じて $\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ に持込みたいのであるが，これは無条件には実行できないので，以下この節の終りまで次の仮定をする：

〈仮定 1〉　$f,\ g\in C^\infty(M)$ に対して，$f*g=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l P_l(f,\ g)$ としたとき，各 l，各 $p\in M$ に対して，$\tau_{p,x}P_l(f,\ g)$ は $\tau_{p,x}f$，$\tau_{p,x}g$ によってのみ定まる．

上の仮定は，$f*g$ の点 p の近くでの振舞いは $f,\ g$ の p の近くでの振舞いだけに影響されており，p から遠く離れた所で $f,\ g$ がどのようになっていても全く関係がないと言っているもので，「$*$-積の **局所決定性の仮定**」と呼

*）証明は E. Nelson, Topics in dynamics I. Flows. Math. Lec. Note, Princeton, 1969 参照．

んでも良いと思われる．

まず，$\tilde{f}=\sum_{i=0}^{\infty}\nu^i f_i$ に対し，$\tau_{p,x}(\tilde{f})=\sum_{i=0}^{\infty}\nu^i\tau_{p,x}(f_i)$ と定義すると，$\tau_{p,x}$ は $C_\nu^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ の上への線形写像となる．

補題 1 局所決定性の仮定の下で，$\tau_{p,x}$：$C_\nu^\infty(M)\to\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ の核 $\mathcal{I}_{p,x}$ は $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ の両側イデアルとなる．したがって，$C_\nu^\infty(M)/\mathcal{I}_{p,\nu}$ 上に自然に $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ から積の構造が移送され，これによって $\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ に非可換代数の構造が入る．

証明 $f\in\mathcal{I}_{p,\nu}$ ならば，$\tau_{p,x}(f)=0$．ところが $\tau_{p,x}P_l(f,\ g)$ は $\tau_{p,x}(f)$，$\tau_{p,x}(g)$ できまるのだから，どちらかが 0 ならば $\tau_{p,x}P_l(f,\ g)$ は 0 となる．これより，$C_\nu^\infty(M)*\mathcal{I}_{p,\nu}\subset\mathcal{I}_{p,\nu}$，$\mathcal{I}_{p,\nu}*C_\nu^\infty(M)\subset\mathcal{I}_{p,\nu}$ を得る．これは $\mathcal{I}_{p,\nu}$ が両側イデアルであることを示している． □

以下，M の各点において，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ には上の補題を通じて $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ から積を移送して非可換代数として考えるものとし，この積も前と同じ記号 $*$ で表示する．

このようにして得られた非可換代数 $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p,\ *)$ は，$(C_\nu^\infty(M),\ *)$ から見ると，1 点 p の所での情報しか含んでいないのであるが，大域的性質が消えているので $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ よりははるかに扱いやすい．$(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p,\ *)$ を $(C_\nu^\infty(M),\ *)$ の p における **無限小部分** と呼ぶことにする．イメージとしては M の各点の無限小の近傍上で $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p,\ *)$ なる非可換代数が与えられていると考えて良い．

p を原点とする座標系を $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ から $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ に変更すれば，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ の元 $\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l\tau_{p,x}(f_l)$ は，$(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ に関するテイラー展開に変る．$\tau_{p,x}(f)=\sum\frac{1}{\alpha!}\partial_x^\alpha f(0)\boldsymbol{x}^\alpha$ と $\tau_{p,y}(f)=\frac{1}{\beta!}(\partial_y^\beta f)(0)\boldsymbol{y}^\beta$ において，$\partial_x^\alpha f(0)$ と $\partial_y^\beta f(0)$ との関係は複雑な式だが，

$$(1)\qquad \partial_x^{\alpha} f(0)=\sum C\begin{pmatrix}\alpha, & l_1, & \cdots, & l_n\\ \beta, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_n\end{pmatrix}(\partial_y^{\beta} f)(0)\,(\partial_x^{\gamma_1} y_1)^{l_1}(0)\cdots(\partial_x^{\gamma_n} y_n)^{l_n}(0)$$

の形になる．$C\begin{pmatrix}\alpha, & l_1, & \cdots, & l_n\\ \beta, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_n\end{pmatrix}$ は定数（極めて複雑）*) で，和は，$|\beta|=l_1+\cdots+l_n$，$\alpha=l_1\gamma_1+\cdots+l_n\gamma_n$ をみたすすべての $\beta, l_1, \cdots, l_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ について行う．式は複雑だが，定数部分まで必要になることはないから，読者としては (1) が f に関して線形同形写像になっていることを確認すれば十分である．

この座標変換で $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p, *)$ と $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}]\!]_p, *)$ とは同形となることは明らかであろうが，これは要するに同じ関数を座標系を変えてテイラー展開しているだけのものである．そこで $\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ などの奥には座標系のとり方とは無関係の抽象的な代数 $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ があって，それを座標系 $x_1, \cdots, x_n$ で表示したものが $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p, *)$ であると考えることにする．この考え方は多様体とかテンソルの考え方に慣れている人にとってはやさしいことであろうが，座標変換の規則がテンソルの場合よりはるかに複雑で座標系の高階微分まで変換の中に入ってくることに注意してもらいたい．$(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ も $(C_\nu^\infty(M), *)$ の p における **無限小部分** と呼ぶ．

M の各点で非可換代数 $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ が与えられているので，この状態を記号で $\coprod_{p\in M}\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ と書く．これは集合としては直和集合 $\bigcup_{p\in M}\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ を考えていることを意味する．$\coprod_{p\in M}\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ のことを $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ と略記することもある．$\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ の元を $(p\,;\,X)$ のように書くが，これは $X\in\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ であることを意味する．$(p\,;\,X)\in\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ に対し，$p=\pi(p\,;\,X)$ と書いて，π を $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ から M の上への写像と考え，これを $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ から M への **射影** と呼ぶ．

$\Phi_{\nu,M}^{(n)}=\coprod_{p\in M}\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ を M 上の **代数束** (algebra bundle) と呼ぶこともあるが，これは代数 $\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ が $p\in M$ をパラメーターとして束（たば）になっていると

*)　正確な式は，藤原大輔，一般化された Bell 多項式，日本数学会，数学，42 巻 1 号，1990 年，pp. 89-90.

いうイメージからくる言葉の使い方である．導線のいっぱいつまった電話のケーブルのようなものを想像すれば良い．一本の導線が $\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ にあたるので，$\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ のことを p における **ファイバー** と呼ぶこともある．

電話のケーブルの「切断面」と言ったらどういうものを指すか明白であろうが，そのイメージで，M から $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ への写像 σ で，各 $p\in M$ で $\pi\sigma(p)=p$ となっているものを $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ の **切断**（cross-section）と呼ぶ．「**切り口**」と呼ぶこともある．これらの用語はあまり深刻な意味はないが何を考えているのか説明するのに便利だから良く使われる．

$\tilde{f}\in C_\nu^\infty(M)$ に対し，$p\in M$ で $\tau_{p,x}(\tilde{f})$ を考えればこれは，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{x}]\!]_p$ の元であるが，使う座標系を指定しないで $\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ の元とも考えられる．このような場合には $\tau_{p,x}(\tilde{f})$ と書かずに $\tau_p(\tilde{f})$ と書くことにする*)．各 $\tilde{f}\in C_\nu^\infty(M)$ に対し，

$$\sigma_{\tilde{f}}(p)=(p;\ \tau_p(\tilde{f}))$$

を考えれば，$\sigma_{\tilde{f}}$ は代数束 $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ の切断の例である．

もう少し，$\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ に関する用語の説明を続けよう．上の定義からすると，$p\in M$ におけるファイバー $\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ の代数的構造は p が違えば全く違ったものになってもかまわない．しかし，そうなっているということは p の無限小近傍と q のそれとの性質が違うということを意味する．M は素朴な考え方では力学系の入れ物，あるいは相空間と理解されるものだから，点毎に“空間”の構造が変ってしまうようなものまで許してしまうと極めて難しくなってしまう．そこで，座標系の平行移動を少し考えてみよう．

U を M の開集合，$y_1, \cdots, y_n$ を U 上の局所座標系とする．$p\in U$ の座標を（$y_1(p), \cdots, y_n(p)$）とし，$x_i=y_i-y_i(p)$ とすれば，$x_1, \cdots, x_n$ は p を原点とする局所座標系だから，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]_p$ が考えられる．$q\in U$ のとき，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]_p$ と $\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(q)]\!]_q$ とは

---

*） これを $\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{\nu}]\!]$-値関数の **ジェット**（jet）と呼ぶことがある．

$$T_{p,q}\left(\sum \nu^l a_{l\alpha}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p))^\alpha\right)=\sum \nu^l a_{l\alpha}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(q))^\alpha$$

で定義される写像で線形同形であるが，$(C_\nu^\infty(M), *)$ から降りてくる $*$-積の構造は，局所決定性の仮定から，一般には何の関係も持ち得ない．そこで次のような都合の良い場合を考える：

〈仮定2〉　任意の $p\in M$ に対して，p の開近傍 U と，その上の局所座標系 $y_1, \cdots, y_n$ があり，この座標系に関する p から U の任意の点 q への平行移動 $T_{p,q}$ は，$(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]_p, *)$ から $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(q)]\!]_q, *)$ の上への同形写像になっている．

上の仮定は「“空間” $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ の **一様性の仮定**」と呼んでも良いであろうが，数学では上の仮定がみたされていることを，「$\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ は **局所自明束** (locally trivial bundle) である」と表現する．

仮定2は極めて強いもので，$\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ がこの性質を持つと，ポアソン多様体 $(M, \{\ ,\ \})$ の方も都合の良い性質を持ってしまうので，次にそのことについて述べよう．

U を M の開集合，$y_1, \cdots, y_n$ を U 上の局所座標系とする．$\{f, g\}=2P_1^-(f, g)$ は前節の (12) により，f に関しても g に関しても微分 (derivation) になっているから，第 I 部 2章 **7°** の定理を使って，

$$(2)\qquad \{f, g\}=\sum_{i,j}\{y_i, y_j\}\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial y_j}$$

と書ける．$\{y_i, 1\}=0$ だから，$\{y_i, y_j\}=\{y_i-y_i(p), y_j-y_j(p)\}$ に注意し，(2) の両辺を $p\in U$ でテイラー展開すると，

$$(3)\qquad \tau_{p,\boldsymbol{y}}(\{f, g\})=\sum_{i,j}\tau_{p,\boldsymbol{y}}(\{y_i-y_i(p), y_j-y_j(p)\})\frac{\partial}{\partial y_i}\tau_{p,\boldsymbol{y}}(f)\frac{\partial}{\partial y_j}\tau_{p,\boldsymbol{y}}(g)$$

となる．一方，$\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]_p$ を $\prod_{l=0}^{\infty}\nu^l\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]_p$ と分解し，$\hat{f}, \hat{g}\in \boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(p)]\!]$ に対し $*$-積を

$$\hat{f} * \hat{g} = \hat{f}\cdot\hat{g} + \frac{\nu}{2}\{\hat{f}, \hat{g}\}_p + \cdots + \nu^l P_l(\hat{f}, \hat{g}) + \cdots$$

と書く．この積は $(C_\nu^\infty(M), *)$ から降りてきたものであるから，(3) より，次の式が得られる：

$$(4) \qquad \{\hat{f}, \hat{g}\}_p = \sum\nolimits_{i,j} \tau_{p,y}\{y_i - y_i(p), y_j - y_j(p)\}\frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i}\frac{\partial \hat{g}}{\partial y_j}.$$

ところで，ポアソン多様体 $(M, \{\ ,\ \})$ の，点 p における階数とは，行列 $(\{y_i, y_j\}(p))$ の階数のことであったから，これは，(4) を使って，

$$\mathrm{rank}(\{y_i - y_i(p), y_j - y_j(p)\}_p)_{1\leq i,j\leq n}$$

のことだと言って良い．

一方，仮定 2 の下では $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}(p)]\!]_p, *)$ と $(\boldsymbol{R}_\nu[\![\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}(q)]\!]_q, *)$ は平行移動による写像 $T_{p,q}$ により同形で，$T_{p,q}\nu\tilde{f} = \nu T_{p,q}\tilde{f}$ である．

$$(5) \qquad [\hat{f}, \hat{g}] = -\nu\{\hat{f}, \hat{g}\}_p + \nu^2 \text{以上の項}$$

に注目すれば，$T_{p,q}$ は，ポアソン環 $(\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}(p)]\!]_p, \{\ ,\ \}_p)$ を $(\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}(q)]\!], \{\ ,\ \}_q)$ に移す同形写像にもなっている．つまり，ポアソン環自身が平行移動で同形なわけであり，このことにより，第 2 章 **9°** の結果を使うと次の定理が得られる：

定理 仮定 1，2 の下で，ポアソン多様体 $(M, \{\ ,\ \})$ の階数は M の連結成分上で一定である．特に，任意の $p \in M$ の近傍で局所座標系 $(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s)$ $(n = 2r + s)$ を上手にとると，

$\{x_i, x_j\} = 0$, $\{y_i, y_j\} = 0$, $\{x_i, z_k\} = \{y_i, z_k\} = 0$, $\{z_k, z_l\} = 0$,
$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$

となるようにできる．

4° Weyl (ワイル) 代数

$(C_\nu^\infty(M), *)$ の p における無限小部分として前節で登場した非可換代数 $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ はどんな代数であろうか？　この節でその典形的なものを詳しく調べておこう．

さて，$(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ の例となるような代数を作るのだが，まず生成元 ν, X_1, $\cdots$, X_r, Y_1, $\cdots$, Y_r, Z_1, $\cdots$, Z_s $(n=2r+s)$ を用意する．積を定義するのだが，積を $*$ で書くことにする．そしてまず次のように約束する：

$$(1)\quad \begin{cases} X_i * \nu = \nu * X_i, \quad Y_i * \nu = \nu * Y_i \quad (1 \leqq i \leqq r), \\ Z_a * \nu = \nu * Z_a \quad (1 \leqq a \leqq s) \\ X_i * X_j = X_j * X_i, \quad Y_i * Y_j = Y_j * Y_i \quad (1 \leqq i, j \leqq r) \\ Y_i * X_j = X_j * Y_i + \delta_{ij}\nu \quad (1 \leqq i, j \leqq r) \\ Z_a * X_i = X_i * Z_a, \quad Z_a * Y_i = Y_i * Z_a \\ \qquad\qquad (1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq a \leqq s). \end{cases}$$

4 行目の式を除いては可換性を述べているだけだから複雑に見えるが単純な関係式である．これと前節最後の局所座標系の性質とを比べてみてもらいたい．

積が上の関係をみたすことを要求すると，上の生成元から生成されてくる元は必ず

$$(2)\qquad \nu^l * X_1^{\alpha_1} * \cdots * X_r^{\alpha_r} * Y_1^{\beta_1} * \cdots * Y_r^{\beta_r} * Z_1^{\gamma_1} * \cdots * Z_s^{\gamma_s}$$

の形の元の和で書ける．(2) の形の元を 2 つとって積を作っても (1) による元の交換則を次々に使えば，結果は再び (2) の形の元の有限和となる．係数として使う体を実数体 $\boldsymbol{R}$ としておけば，(1) の関係によって $\boldsymbol{R}$ 上の非可換代数 $\boldsymbol{W}'_{2r}$ が作られていることがわかる．これを **階数 $2r$ のワイル** (Weyl) **代数***) と呼ぶ．

---

*)　ワイル代数の代数的取扱いについては，堀田良之著，代数入門，数学シリーズ，裳華房，参照．

計算を楽にするために，(2) の形の元を，

（3） $$\nu^l X^\alpha * Y^\beta * Z^\gamma$$

と多重添字を用いて書き，その **次数** を deg と書き，

（4） $$\deg(\nu^l X^\alpha * Y^\beta * Z^\gamma) = 2l + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

と約束する．ただし，$|\alpha|$ などは $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ のことである．

$\boldsymbol{W}(k)$ を，$\boldsymbol{W}'_{2r}$ の元で次数が k のものを全部集めて作った線形部分空間とし，$\boldsymbol{W}(0) = \boldsymbol{R}$ と約束する．言うまでもなく，$\boldsymbol{W}'_{2r}$ の各元は，次数毎に整理して書けるから，

（5） $$a_0 + a_1 + \cdots + a_l \quad （有限和）, \qquad a_i \in \boldsymbol{W}(i)$$

の形で書ける．また，$\boldsymbol{W}(k)$ は有限次元である．

積に関して，

（6） $$\boldsymbol{W}(k) * \boldsymbol{W}(l) = \boldsymbol{W}(k+l) \qquad (k,\ l \geqq 0)$$

が成立することも明らかであろう．このことから，(5) のような有限和だけでなく，

（7） $$a_0 + a_1 + \cdots + a_l + \cdots \quad （無限和）, \qquad a_l \in \boldsymbol{W}(l)$$

を形式的に考えてもこれらの元の間に積 $*$ が（分配法則を使って）矛盾なく定義される．(6) のような無限和の全体を $\boldsymbol{W}_{2r}$ と書き，階数 $2r$ の（形式的）**ワイル代数***) と呼ぶ．$\boldsymbol{W}_{2r}$ は線形空間としては，形式的ベキ級数環 $\boldsymbol{R}[[\nu, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]]$ と同形である．計算練習を兼ねて次の補題を証明しておこう：

補題 1 (i) $[\boldsymbol{W}(k), \boldsymbol{W}(l)] \subset \nu \boldsymbol{W}(k+l-2)$（ただし，$\boldsymbol{W}(-1) = \boldsymbol{W}(-2) = \{0\}$ である．） ただし，$[a, b] = a*b - b*a$ であり，$[\boldsymbol{W}(k), \boldsymbol{W}(l)]$ は $[a, b]$, $a \in \boldsymbol{W}(k)$, $b \in \boldsymbol{W}(l)$, の有限和の全体である．

(ii) $\nu \boldsymbol{W}_{2r}$ は，$\boldsymbol{W}_{2r}$ の両側イデアルで，$\boldsymbol{W}_{2r}/\nu \boldsymbol{W}_{2r}$ は形式的ベキ級数環 $\boldsymbol{R}[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]]$ と代数として同形．

---

*) $\boldsymbol{W}'_{2r}$ よりも $\boldsymbol{W}_{2r}$ の方を多く使うので，以下では「形式的」という言葉は省略することが多い．

(iii) $W_{(1)}$ を次数が1以上の W_{2r} の元全体とすると, $W_{(1)}$ は W_{2r} の中の唯一の極大両側イデアルである.

証明 (i) (1)を使って, $b*a$ を $a*b$ の形に直そうとすると, 4行目の関係を使うときにだけ ν のついた項が出てくる. ν は全体と可換でこれが一度つくと, 消えることはないから, $[a, b] \in \nu W_{2r}$ である. これより (i) が得られる.

(ii) 上のことより νW_{2r} は両側イデアルで $W_{2r}/\nu W_{2r}$ は可換環であることがわかる. $W_{2r}/\nu W_{2r}$ は X, Y, Z で生成される可換環で, νW_{2r} を法として見れば可換であるという性質以外は何も残っていないから, $R[\![X, Y, Z]\!]$ と同形となる.

(iii) $W_{2r} * W_{(1)} = W_{(1)} * W_{2r} = W_{(1)}$, $W_{2r}/W_{(1)} = R$ だから, $W_{(1)}$ が極大な両側イデアルであることは明らか. $W_{(1)}$ 以外に極大両側イデアル $\mathscr{I}$ があったとしよう. $\mathscr{I} \subsetneqq W_{(1)}$ は起り得ないから, $\mathscr{I} \neq W_{(1)}$ ならば, $a \in \mathscr{I}$, $a \notin W_{(1)}$ なる元 a がなければならない. a を次数で分解して

$$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_l + \cdots, \qquad a_l \in W(l)$$

と書けば, $a \notin W_{(1)}$ より, $a_0 \neq 0$ を得る. a_0^{-1} をかけることにより, $a = 1 - a' \in \mathscr{I}$ として良いが, $a' \in W_{(1)}$ であるから, $(1-a')^{-1} = 1 + a' + a'^2 + \cdots \in W_{2r}$ だから, $1 \in \mathscr{I}$ となり, $\mathscr{I} = W_{2r}$ となってしまう. □

さて, (形式的) ワイル代数 W_{2r} が与えられたとして, これを形式的ベキ級数環 $R[\![X, Y, Z]\!]$ の変形されたものと見るのではなしに, W_{2r} の方が $R[\![X, Y, Z]\!]$ よりも基本的なものと考えて, $*$-積を使って普通の可換積を定義し直すことを考えよう. そのため, 記号を簡略化する目的で, 以下では

$(X_1, \cdots, X_r, Y_1, \cdots, Y_r, Z_1, \cdots, Z_s)$ を

$$(\tilde{Z}_1, \cdots, \tilde{Z}_r, \tilde{Z}_{r+1}, \cdots, \tilde{Z}_{2r}, \tilde{Z}_{2r+1}, \cdots, \tilde{Z}_n)$$

と書くことにする. 無論, 場合によってはもとの記号にも戻る.

2° で定義したのと同様に, $a, b \in W_{2r}$ に対して,

(8)　$a \circ b = \frac{1}{2}(a * b + b * a)$　（対称積）

とおき，$(a\circ)^p \cdot b$ を，

(9)　$(a\circ)^p \cdot b = a \circ (a \circ (\cdots (a \circ b) \cdots))$　（$a\circ$ を p 回続ける）

と定義する．さらに多重添字を用いて，

(10)　$(\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\alpha \cdot b = (\tilde{Z}_1\circ)^{\alpha_1} \cdot (\tilde{Z}_2\circ)^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot (\tilde{Z}_n\circ)^{\alpha_n} \cdot b$

とする．(1) より，$[\tilde{Z}_i, \tilde{Z}_j]$ は 0，または $\pm\nu$ で，いずれにしろ $[[\tilde{Z}_i, \tilde{Z}_j], \boldsymbol{W}_{2r}] = \{0\}$ だから*)，　**2°** の (11) 式より，

(11)　$\tilde{Z}_i \circ (\tilde{Z}_j \circ b) = \tilde{Z}_j \circ (\tilde{Z}_i \circ b)$

となる．したがって，$(\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\alpha \cdot b$ の計算では $\tilde{Z}_i\circ$，$\tilde{Z}_j\circ$ の順序を気にする必要がない．特に，$(\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\alpha \cdot (\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\beta \cdot b = (\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^{\alpha+\beta} \cdot b$ である．

そこで，改めて，$(\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\alpha \cdot 1$ を $(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha$ と書き，積 $\odot$ を，

(12)　$(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha \odot (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\beta = (\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\alpha \cdot (\tilde{\boldsymbol{Z}}\circ)^\beta \cdot 1 = (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha+\beta}$

と定義する．さらに，これに調子を合わせて，$\tilde{Z}_i \cdot 1$ を $\tilde{Z}_i$，$\tilde{Z}_i \circ \tilde{Z}_j$ を $\tilde{Z}_i \odot \tilde{Z}_j$ などと書くことにする．$\boldsymbol{W}_{2r}$ は新しく定義された $\odot$-積によって結合律をみたす可換な代数となるが，これが $\boldsymbol{R}[\![\nu, \tilde{\boldsymbol{Z}}]\!]$ と環として同形なのは生成元を考えれば明らかであろう．注目すべきは，$\odot$-積は $*$-積から作られているということである．$\boldsymbol{W}_{2r}$ の元は，

(13)　$a = \sum_{l,\alpha} a_{l,\alpha} \nu^l (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha$,　$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

の形に一意的に書くこともできる．

$*$-積と $\odot$-積の関係をもっと詳しく見るために，$a \in \boldsymbol{W}_{2r}$ の**形式的微分** $\partial_{\tilde{z}_i} a$ を次式を使って定義しよう：

(14)　$\partial_{\tilde{z}_i} (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha = \alpha_i (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha-(i)}$

（ただし，$\alpha - (i) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_i - 1, \cdots, \alpha_n)$）

$\partial_{\tilde{z}_i} a$ は，$\partial_{\tilde{z}_i}$ が線形で $\partial_{\tilde{z}_i} \nu = 0$ をみたすものとすれば (14) 式から自然に定義

---

*）$\odot$-積を定義するためにはこの性質しか使われていない．このことは後の方で使用する．

される．一方，次も容易にわかる：

補題 2

$$[X_i,\ (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}] = -\nu\,\partial_{Y_i}(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}, \qquad [Y_i,\ (\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}] = \nu\,\partial_{X_i}(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}$$

これより，∂_{X_i}, ∂_{Y_i} の計算では，

$$\partial_{X_i} a = \frac{1}{\nu}[Y_i,\ a], \qquad \partial_{Y_i} a = -\frac{1}{\nu}[X_i,\ a] \tag{15}$$

として良いことがわかるが，∂_{Z_i} は $\boldsymbol{W}_{2r}$ の演算で表現することはできない．しかし，$\odot$-積と $*$-積の関係を書くにはこれで十分である．

補題 3　$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$，$\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_r)$ として次の公式が成立する：

$$\boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta} = \sum_{|\gamma|\geqq 0} \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{-\nu}{2}\right)^{|\gamma|} (\partial_X^{\gamma}\boldsymbol{X}^{\alpha}) \odot (\partial_Y^{\gamma}\boldsymbol{Y}^{\beta})$$

ただし，$\partial_X^{\gamma}=\partial_{X_1}^{\gamma_1}\partial_{X_2}^{\gamma_2}\cdots\partial_{X_r}^{\gamma_r}$，$\partial_Y^{\gamma}=\partial_{Y_1}^{\gamma_1}\partial_{Y_2}^{\gamma_2}\cdots\partial_{Y_r}^{\gamma_r}$ である．

証明　$a*b=a\circ b+\dfrac{1}{2}[a,\ b]$ を使って，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\alpha+(i)} * \boldsymbol{Y}^{\beta} &= X_i \circ (\boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta}) + \frac{1}{2}[X_i,\ \boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta}], \\ \boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta+(i)} &= (\boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta}) \circ Y_i - \frac{1}{2}[Y_i,\ \boldsymbol{X}^{\alpha} * \boldsymbol{Y}^{\beta}] \end{aligned} \tag{16}$$

だから，これを使って帰納法を行えば良い．　□

似たようなことだが，

$$(X_i \circ a) * b = X_i \circ (a * b) + \frac{1}{2} a * [X_i,\ b]$$

を使うと，帰納法で次の式も容易にわかる：

$$((\boldsymbol{X}\circ)^{\alpha}\cdot a) * b = \sum_{|\gamma|\geqq 0} \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{-\nu}{2}\right)^{|\gamma|} (\partial_X^{\gamma}(\boldsymbol{X}\circ)^{\alpha})\cdot(a * \partial_Y^{\gamma} b) \tag{17}$$

$$((\boldsymbol{Y}\circ)^{\beta}\cdot a) * b = \sum_{|\gamma|\geqq 0} \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{|\gamma|} (\partial_Y^{\gamma}(\boldsymbol{Y}\circ)^{\beta})\cdot(a * \partial_X^{\gamma} b). \tag{18}$$

(17) で $a=(\boldsymbol{Y}\circ)^{\beta}\cdot 1$ とおき，それに (18) を使うと，

$$(19)\qquad ((\boldsymbol{X}\circ)^{\alpha}\cdot(\boldsymbol{Y}\circ)^{\beta}\cdot 1)*b$$
$$=\sum_{\gamma,\delta}\frac{1}{\gamma!\,\delta!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{|\gamma|+|\delta|}\partial_X^{\gamma}\partial_Y^{\delta}((\boldsymbol{X}\circ)^{\alpha}\cdot(\boldsymbol{Y}\circ)^{\beta})\cdot\partial_X^{\delta}(-\partial_Y)^{\gamma}b$$

を得る．$Z_1, \cdots, Z_s$ はすべての元と可換だから $(\boldsymbol{Z}\odot)^{\gamma}*a=\boldsymbol{Z}^{\gamma}*a=Z^{\gamma}\odot a$ だから，(19) 式と，$\odot$-積の定義より，$(\widetilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}=\widetilde{Z}_1{}^{\alpha_1}\odot\widetilde{Z}_2{}^{\alpha_2}\odot\cdots\odot\widetilde{Z}_n{}^{\alpha_n}$ に対して，

$$(20)\qquad (\widetilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}*b=\sum_{\gamma,\delta}\frac{1}{\gamma!\,\delta!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{|\gamma|+|\delta|}\partial_X^{\gamma}\partial_Y^{\delta}(\widetilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}\odot\partial_X^{\delta}(-\partial_Y)^{\gamma}b$$

を得る．これを少しまとめ直して，次の定理となる：

定理 $a, b\in \boldsymbol{W}_{2r}$ に対して，

$$a*b=a\exp\left(\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_Y\odot\overrightarrow{\partial}_X-\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y)\right)b$$

（記号の意味は証明を参照せよ．）

証明 任意の $a\in\boldsymbol{W}_{2r}$ は $\sum a_{l\alpha}\nu^{l}(\widetilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^{\alpha}$ の形に書けるから，(20) より，

$$(21)\qquad a*b=\sum_{\gamma,\delta}\frac{1}{\gamma!\,\delta!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{|\gamma|+|\delta|}(\partial_X^{\gamma}\partial_Y^{\delta}a)\odot(\partial_X^{\delta}(-\partial_Y)^{\gamma}b)$$

であるが，これをスマートに書くために，

$$a\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y b=\sum_{i=1}^{r}\partial_{X_i}a\odot\partial_{Y_i}b$$

のような記号を用いる．矢印はどちら側を微分するかを示す．この記号を用いると，(21) は，

$$(22)\qquad a*b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{k}a(\overleftarrow{\partial}_Y\odot\overrightarrow{\partial}_X-\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y)^{k}b$$

と書ける．e^{x} の展開公式を使えば，(22) はさらに上記のように書きかえられる．
□

上の公式は計算上は便利なもので，たとえば，

$$a\exp\left(\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_Y\odot\overrightarrow{\partial}_X-\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y)\right)b$$

$$= a\exp\left(\frac{\nu}{2}\overleftarrow{\partial}_Y \odot \overrightarrow{\partial}_X\right)\exp\left(-\frac{\nu}{2}\overleftarrow{\partial}_X \odot \overrightarrow{\partial}_Y\right)b$$

であるから，これを利用して計算すると，

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{r} X_i \odot Y_i\right) * f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\nu}{2}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} - \frac{\nu}{2}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\right) \tag{23}$$

といった公式が得られる．ただし，$f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{W}_{2r}$ の元で，$f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\nu}{2}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} - \frac{\nu}{2}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\right)$ は，$f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ を $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ と $\odot$-積を用いて表示した式において，$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ をそれぞれ $\boldsymbol{X} + \frac{\nu}{2}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} - \frac{\nu}{2}\boldsymbol{Y}$ におきかえて得られる $\boldsymbol{W}_{2r}$ の元を意味する．

上の公式は $a * b$ を $\odot$-積を用いて書いた式であるが,似たような計算で，$a \odot b$ を $*$-積を用いて書くこともできる．結果は，

$$a \odot b = a\exp\left(-\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_Y * \overrightarrow{\partial}_X - \overleftarrow{\partial}_X * \overrightarrow{\partial}_Y)\right) \tag{24}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\left(-\frac{\nu}{2}\right)^{|\alpha|+|\beta|} \partial_Y^\alpha \partial_X^\beta a * \partial_X^\alpha (-\partial_Y)^\beta b$$

となることが少し計算してみると自然にわかる．

5° Weyl（ワイル）関数

関数と呼びはしたが，この節で扱うものは通常の意味での関数ではない．前節でも $\boldsymbol{W}_{2r}$ の元を $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ のように書いたが,この節で扱う“関数”とは，ある非可換代数の元をその生成元を用いて表示したときの表示のことに他ならない．したがって，この節での“関数”は決して写像としての意味は持たないし，その“関数”にある点の座標を代入して，関数の値なるものをとり出すことはできないものである．それにもかかわらず，「関数」という言葉を用いるのは，それが，写像としての関数概念が定着する以前に用いられていた関数（function）の概念に近いからである．

$\boldsymbol{W}_{2r}$ を階数 $2r$ のワイル代数とし，ν, X_1, …, X_r, Y_1, …, Y_r, Z_1, …, Z_s を生成元とする．$n=2r+s$ とし，U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とする．直積，$\boldsymbol{W}_U=U\times\boldsymbol{W}_{2r}$ を U 上の自明な代数束と考える．

U 上の座標系を $(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_r)$ とし，特別な $\boldsymbol{W}_U$ の切断として次のようなものを考える： $p\in U$ として，

$$\xi_i(p)=x_i(p)+X_i\,,\quad \eta_i(p)=y_i+Y_i\quad (1\leqq i\leqq r),$$

$$\zeta_a(p)=z_a(p)+Z_a\quad (1\leqq a\leqq s).$$

$(\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \cdots, \eta_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_s)$ を **ワイル座標関数** と呼ぶが，まとめて書きたい場合にはこれを $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \cdots, \tilde{\xi}_n)$ のようにも書く．

一般に $\boldsymbol{W}_U$ の切断 σ, τ に対して，積 $\sigma*\tau$ を

$$(1)\qquad (\sigma*\tau)(p)=\sigma(p)*\tau(p)$$

で定義すれば $\sigma*\tau$ も $\boldsymbol{W}_U$ の切断になるから，$\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ の元を係数とする $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \cdots, \tilde{\xi}_n)$ の多項式

$$p(\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_n)(p)=\sum a_\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\alpha(p)\,,\qquad p\in U,\ a_\alpha\in\boldsymbol{R}[\![\nu]\!],$$

も $\boldsymbol{W}_U$ の切断となる．さらに，$\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \cdots, \eta_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_s$ などの交換関係は前節の (1) と全く同じで，

$$(2)\qquad \xi_i*\xi_j=\xi_j*\xi_i\,,\qquad \eta_j*\xi_i=\xi_i*\eta_j+\nu\delta_{ij}$$

などであるから，前節の $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ でおきかえて，$\odot$-積が定義され，さらに $*$-積を $\odot$-積で表わす公式や，その逆の公式も全く同じ形で成立する．つまり，多項式は

$$(3)\qquad p(\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_n)=\sum b_\alpha(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\odot)^\alpha\,,\qquad b_\alpha\in\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$$

の形に一意的に書くことができ，

$$(4)\qquad p(\tilde{\boldsymbol{\xi}})*q(\tilde{\boldsymbol{\xi}})=p(\tilde{\boldsymbol{\xi}})\exp\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_\eta\odot\overrightarrow{\partial}_\xi-\overleftarrow{\partial}_\xi\odot\overrightarrow{\partial}_\eta)\,q(\tilde{\boldsymbol{\xi}})$$

などが成立する．上のような $\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_n$ の多項式を **ワイル多項式** と呼び，その全体を $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)$ と書く．上の積公式より，

$$(5)\qquad \mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)*\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)\subset\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)$$

が成立していることが容易にわかる．

（$x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s$）をまとめて（$\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n$）と書き，ワイル多項式 $p(\zeta)=\sum a_\alpha(\tilde{\zeta}\odot)^\alpha$, $a_\alpha \in \boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ に対して，$\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n$ の多項式 $\tilde{p}(\tilde{z})=\sum a_\alpha \tilde{z}^\alpha$ を考えて見ると，$p(\tilde{\zeta})$ と $\tilde{p}(\tilde{z})$ との関係は，当然

$$(6)\qquad p(\tilde{\zeta})=\tilde{p}(\tilde{z}+\tilde{\boldsymbol{Z}})$$

であるから，テイラーの展開定理を用いれば

$$(7)\qquad p(\tilde{\zeta})(p)=\sum_\gamma \frac{1}{\gamma!}(\partial_{\tilde{z}}^\gamma \tilde{p})(\tilde{z}(p))(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\gamma$$

と書くことができる．これを参考にして，一般に U 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ に値をとる C^∞ 級関数 f が与えられたとき，$\boldsymbol{W}_U$ の切断 $f^\#(\tilde{\zeta})$ を次式で定義する：

$$(8)\qquad f^\#(\tilde{\zeta})(p)=\sum \frac{1}{\gamma!}(\partial_{\tilde{z}}^\gamma f)(\tilde{z}(p))(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\gamma$$

テイラーの展開定理を思い出せば，$f^\#(\tilde{\zeta})$ は $f(\tilde{z}+\tilde{\boldsymbol{Z}})$ と書いても良いようなものである．位相については何も言っていないから少々不正確な述べ方ではあるが，多項式近似定理を用いると，上の $f^\#(\tilde{\zeta})$ はワイル多項式で近似できる*)．

上のように，U 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値 C^∞ 級関数 f を用いて $f^\#$ の形で与えられる関数を $\boldsymbol{W}_U$ 上の **ワイル関数** と呼び，f から $f^\#$ を作る手続きを **ワイル接続**（Weyl continuation）と呼ぶ．

定理1　$\boldsymbol{W}_U$ 上のワイル関数 $f^\#(\tilde{\zeta})$, $g^\#(\tilde{\zeta})$ に対して，積 $f^\#(\tilde{\zeta})*g^\#(\tilde{\zeta})$ も $\boldsymbol{W}_U$ 上のワイル関数である．しかも，

$$f^\#(\tilde{\zeta})*g^\#(\tilde{\zeta})=\left(f(\tilde{z})\exp\frac{\nu}{2}\left(\overleftarrow{\partial}_y\odot\overrightarrow{\partial}_x-\overleftarrow{\partial}_x\odot\overrightarrow{\partial}_y\right)g(\tilde{z})\right)^\#$$

が成立する．（右辺の # はワイル接続を表わす．）

証明　$f^\#(\tilde{\zeta})*g^\#(\tilde{\zeta})(p)=f^\#(\tilde{\zeta})(p)*g^\#(\tilde{\zeta})(p)$　だから，前節の定理により，積は

---

*）　正確な述べ方は後の方の **6°** 参照．

$$\left(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(\partial_{\tilde z}^\alpha f)(\tilde z)(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha\right)\exp\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_Y\odot\overrightarrow{\partial}_X-\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y)\left(\sum_\beta \frac{1}{\beta!}(\partial_{\tilde z}^\beta g)(\tilde z)(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\beta\right)$$

であるが，これは，

$$f(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}})\exp\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_Y\odot\overrightarrow{\partial}_X-\overleftarrow{\partial}_X\odot\overrightarrow{\partial}_Y)\,g(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}})$$

と書いても良い．すると，$\partial_{X_i}(f(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}}))=(\partial_{x_i}f)(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}})$ などが成立するから，

$$\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta(f(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}}))=(\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f)(\tilde z+\tilde{\boldsymbol{Z}})$$

が成立する．つまり，$\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta f^\# = (\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f)^\#$ が成立する．このことから積の公式が得られる．

一方

$$f(\tilde z)\exp\frac{\nu}{2}\left(\overleftarrow{\partial}_y\odot\overrightarrow{\partial}_x-\overleftarrow{\partial}_x\odot\overrightarrow{\partial}_y\right)g(\tilde z)$$

は U 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値の C^∞ 級関数であるから，これで定理が証明できた． □

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ を $\boldsymbol{W}_U$ 上のワイル関数全体とする．上の定理により，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は $*$-積に関して非可換な代数となる．これの性質や，計算法を少し述べておこう．

(A) **2°** の記号に合わせて，$C_\nu^\infty(U)$ を U 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値 C^∞ 関数の全体とすると，定義よりワイル接続 $\#: C_\nu^\infty(U)\to\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は線形同形写像だから，これを通して $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ の $*$-積を $C_\nu^\infty(U)$ に持込むことができる．前定理より，$f, g\in C^\infty(U)$ のときには

$$f^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})*g^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})=\left(f\cdot g+\frac{\nu}{2}\{f, g\}+\cdots\right)^\#$$

であるから，$C_\nu^\infty(U)$ に持込まれた積 $*$ によって，$(C_\nu(U), *)$ は $C^\infty(U)$ の変形になっている．これは **3°** の仮定 1, 2 をみたし，各点における無限小部分 $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ が $\boldsymbol{W}_{2r}$ と同形になる．

(B) $\boldsymbol{W}_{2r}$ に定義された $\odot$-積は，そのまま $\boldsymbol{W}_U$ の切断 σ, τ についても拡張され，ワイル関数 $f^\#, g^\#$ についても $f^\#\odot g^\#$ が定義される．

定理 2　$f, g \in C_\nu^\infty(U)$ に対し，$f^\# \odot g^\# = (f\cdot g)^\#$.

証明　$f^\#(\tilde{\xi})(p) = f(\tilde{z}(p) + \tilde{Z})$, $g^\#(\tilde{\xi})(p) = g(\tilde{z}(p) + \tilde{Z})$. これをテイラー展開しておいて $f(\tilde{z}(p) + \tilde{Z}) \odot g(\tilde{z}(p) + \tilde{Z})$ を計算すれば，$\odot$-積は可換だから，これは $f\cdot g(\tilde{z}(p) + \tilde{Z})$ と同じとなる．□

この定理により，$\odot$-積は通常の積に対応していることがわかり，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は $\odot$-積に関しても閉じていることがわかる．$\odot$-積は，**4°** の (24) により $*$-積を使って書かれるが $\odot$-積の定義は生成元 $\nu, X_1, \cdots, X_r, Y_1, \cdots, Y_r, Z_1, \cdots, Z_s$ のとり方に依存していることに注意する必要がある．したがって，$*$-積に関する同形写像であっても（生成元を動かしてしまうので）一般に $\odot$-積の同形とはならない．

（**C**）　$U = \boldsymbol{R}^2$, $r = 1$, $s = 0$ とする．$e^x, e^y \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ だから，これのワイル接続 $\exp^\# x$, $\exp^\# y$ を，e^ξ, e^η と書くことにする．$[a, b] = a * b - b * a$ とすれば，$[\xi, \eta] = -\nu$ であり，積公式を使えば容易に

$$[e^\xi, \eta] = -\nu e^\xi, \qquad [\xi, e^\eta] = -\nu e^\eta,$$

$$e^\xi * e^\eta = e^{-\frac{\nu}{2}} e^\xi \odot e^\eta, \qquad e^\eta * e^\xi = e^{\frac{\nu}{2}} e^\xi \odot e^\eta$$

などが得られる．ワイル関数の計算は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U) \oplus \sqrt{-1}\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$$

として，自然に係数を複素数にまで広げることができる．したがって，$e^{\sqrt{-1}\xi}$, $e^{\sqrt{-1}\eta}$ も自然に定義される．これは周期的ワイル関数で，$e^{\sqrt{-1}(\xi+2\pi n)} = e^{\sqrt{-1}\xi}$ などが成立する．さらに，

$$e^{\sqrt{-1}\eta} * e^{\sqrt{-1}\xi} = e^{\sqrt{-1}\nu} e^{\sqrt{-1}\xi} * e^{\sqrt{-1}\eta} \left(= e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\nu} e^{\sqrt{-1}\xi} \odot e^{\sqrt{-1}\eta}\right)$$

が成立する．$u = e^{\sqrt{-1}\eta}$, $v = e^{\sqrt{-1}\xi}$ とすれば，$u * v = e^{\sqrt{-1}\nu} v * u$ である．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^2}) = \{\tilde{f}(\xi, \eta) \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^2})\,;\, \tilde{f}(\xi + 2\pi m, \eta + 2\pi n) = \tilde{f}(\xi, \eta),\ m, n \in \boldsymbol{Z}\}$ とすれば，フーリエ級数展開により，これが u, v により生成されていることがわかる．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^2})$ は **非可換トーラス** と呼ばれることがある．

ここで，後の計算のために複素数に拡張したワイル関数の **共役演算** について少し詳しく述べておこう．$h \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C$ は $h = \tilde{f} + \sqrt{-1}\,\tilde{g}$, $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ と書けるが，これをもう少し詳しく，$h = \sum \nu^l(f_l{}^\# + \sqrt{-1}\,g_l{}^\#)$, f_l, $g_l \in C^\infty(U)$ と書き，h の共役関数 $\bar{h}$ を，

$$\bar{h} = \sum (-\nu)^l(f_l{}^\# - \sqrt{-1}\,g_l{}^\#)$$

と定義する．これは $\bar{\nu} = -\nu$ と考えることを意味する．この約束の下で積公式を良く見ると，

$$\overline{h * h'} = \bar{h}' * \bar{h} \qquad (\text{順序に注意})$$

が成立していることがわかる．したがって，$\overline{[h, h']} = [\bar{h}', \bar{h}]$ である．f, g を U 上の $\boldsymbol{C}$ 値 C^∞ 関数とすれば

$$[f^\#, g^\#] = \nu\{f, g\}^\# + \cdots$$
$$\overline{[f^\#, g^\#]} = -[\bar{f}^\#, \bar{g}^\#] = \bar{\nu}\{\bar{f}, \bar{g}\}^\# + \cdots$$

であるから，ポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ の方は，$\{\overline{f, g}\} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ となる．

(D) $U = \boldsymbol{R}^3$, $r = s = 1$ とする．ワイル座標関数を (ξ, η, ζ) とすると，積公式より，

$$[\xi, e^\eta] = -\nu e^\eta, \qquad \left[\xi, \frac{1}{2}e^{-\eta} \circ (\zeta - \xi^2)\right] = \nu\frac{1}{2}e^{-\eta} \circ (\zeta - \xi^2)$$

が成立する．第 2 の式の ○ は対称積で，計算には一般の結合代数で成立する等式

$$[a, b \circ c] = [a, b] \circ c + b \circ [a, c]$$

を用いる．これと，簡単に証明できる等式 $e^\eta \odot \xi = e^\eta \circ \xi$ を使うと

$$\left[e^\eta, \frac{1}{2}e^{-\eta} \circ (\zeta - \xi^2)\right] = \frac{1}{2}e^{-\eta} \circ [e^\eta, \zeta - \xi^2] = -\nu e^{-\eta} \circ (e^\eta \circ \xi)$$

が得られ，これに，**2°** の (11) を使うと，右辺は

$$-\nu\xi + \frac{\nu}{4}[e^\eta, [e^{-\eta}, \xi]] = -\nu\xi$$

となる．$H = \xi$, $X_+ = \dfrac{1}{2}e^{-\eta} \circ (\zeta - \xi^2)$, $X_- = e^\eta$ とおくと，

$$[H,\ X_+]=\nu X_+,\qquad [H,\ X_-]=-\nu X_-,\qquad [X_+,\ X_-]=\nu H$$

となる．これは，$\nu=1$ の場合には $SL(2,\ \boldsymbol{R})$ のリー環で，$sl(2,\ \boldsymbol{R})$ である．上の $H,\ X_+,\ X_-$ で生成される $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3})$ の部分代数は $sl(2,\ \boldsymbol{R})$ の **普遍展開環** と呼ばれる．

6° ワイル関数環の位相

$\boldsymbol{W}_{2r}$ を $(\nu,\ X_1,\ \cdots,\ X_r,\ Y_1,\ \cdots,\ Y_r,\ Z_1,\ \cdots,\ Z_s)$，$2r+s=n$，から，**4°** の (1) の関係式により作られる階数 $2r$ の (形式的) ワイル代数とし，**5°** でやったように $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U に対し，自明束 $\boldsymbol{W}_U$ を考える．

これまでは $C_\nu^\infty(U)$ とか $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ には位相を全く考えてこなかったが，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は位相環として扱った方が述べ方，考え方が楽になるので，この節で $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ に位相を入れることを考えよう．

(**A**)　直積位相：　$\boldsymbol{W}_{2r}$ は集合としては直積集合

$$(1)\qquad \prod_{l=0}^{\infty}\boldsymbol{W}(l)=\boldsymbol{W}(0)\times\boldsymbol{W}(1)\times\ \cdots\ \times\boldsymbol{W}(k)\times\ \cdots$$

であり，各 $\boldsymbol{W}(k)$ は ${}_{n+k-1}\mathrm{C}_k$ 次元のベクトル空間だから，有限次元ベクトル空間には普通の位相を入れ，$\boldsymbol{W}_{2r}$ にはいわゆる直積位相を入れる．これは，$\boldsymbol{W}_{2r}$ の元の列 $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$，

$$a_n=(a_{n,0},\ a_{n,1},\ \cdots,\ a_{n,k},\ \cdots)$$

が収束するとは，各成分 $\{a_{n,k}\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ が収束する (収束の速さは k 毎に違って良い) ことだと定義している位相であって，これによって $(\boldsymbol{W}_{2r},\ *)$ も $(\boldsymbol{W}_{2r},\ \odot)$ も位相環になる．しかも $\boldsymbol{W}_{2r}$ はこの位相に関して完備空間となり，ワイル代数 $\boldsymbol{W}'_{2r}$ は $\boldsymbol{W}_{2r}$ の中で稠密 (dense) な部分集合となる．上のような位相を **直積位相** と呼ぶが，全く同様に $\boldsymbol{R}[\![\tilde{\boldsymbol{Z}}]\!]$，$\boldsymbol{R}[\![\boldsymbol{\nu}]\!]$ にも直積位相が入って完備な位相ベクトル空間となる．

定理 1 （$(W_{2r}, *)$）の同形写像は必ず連続写像となる．

証明 Φ: $W_{2r} \to W_{2r}$ を同形写像としよう．$W_{(1)}$ は W_{2r} の唯一の極大両側イデアルだが，

$$W_{(k)} = \prod_{l=k}^{\infty} W(l) \tag{2}$$

とすると，これも W_{2r} の両側イデアルで，$W_{(k)} = (W_{(1)})^k$ であることが容易にわかる．したがって，$\Phi W_{(k)} = W_{(k)}$ も成立する．$W_{2r}/W_{(k)} \cong W(0) \oplus \cdots \oplus W(k-1)$ でこれは有限次元だから Φ から自然に引起される写像 $\tilde{\Phi}_k$: $W_{2r}/W_{(k)} \to W_{2r}/W_{(k)}$ は，任意の線形写像が連続だということより連続となる．これに注意すれば，Φ の連続性は容易にわかる． □

（**B**） $C^\infty(U)$ の位相：$C^\infty(U)$ の元の列 $\{f_n\}_{n\in N}$ が収束するとは，「任意に，自然数 k と U 内のコンパクト部分集合 K を固定したとき，f_n 自身および f_n の k 階までの偏導関数がすべて K 上で一様収束すること」だと定義した位相である．この位相を U 上の **C^∞ 位相** と呼ぶが，これで $C^\infty(U)$ は完備なベクトル空間となり，普通の積に関して位相環となる．次の定理は良く知られたものだし応用も広い：

定理 2 （多項式近似定理） $\boldsymbol{R}^n$ 上の多項式を U に制限して考えたもの全体を $\mathcal{P}(U)$ とすると，$\mathcal{P}(U)$ は $C^\infty(U)$ の中で稠密である．

（**C**） $C_\nu^\infty(U)$ の位相： $C_\nu^\infty(U)$ の元は U から $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ への写像と考えられる．したがって，U 上の C^∞ 位相と直積位相を組合わせて，列 $\{f_n\}_{n\in N}$ が収束するとは，

$$f_n = f_{n,0} + \nu f_{n,1} + \cdots + \nu^l f_{n,l} + \cdots$$

としたとき，各 l について $\{f_{n,l}\}_{n\in N}$ が U 上の C^∞ 位相に関して収束することであると定義して位相を入れる．$C_\nu^\infty(U)$ はこの位相に関して完備な位相環となる．定理 2 と組合わせると，次のことが容易に証明できる：

定理 3　$\nu, \tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n$ の多項式を $(\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n)$ の方だけを U に制限したもの全体を $\mathcal{P}_\nu(U)$ とすると，$\mathcal{P}_\nu(U)$ は $C_\nu^\infty(U)$ の中で稠密な部分集合となる．

(D)　広義一様位相：$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ を $\boldsymbol{W}_U$ の連続な切断の全体とする．$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ は各点毎の積で非可換代数となる．$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の元は U から $\boldsymbol{W}_{2r}$ への連続写像であるが，元の列 $\{S_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ が収束するとは，「任意に，U のコンパクト部分集合 K を固定したとき，$\{S_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ が K 上で一様収束する」ことであると定義する．$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ はこの位相に関して完備なベクトル空間となり，かつ位相環となる．

定理 4　$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は $\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の閉部分環であり，$\mathcal{P}_\nu(U)^\#$ はこの中の稠密な部分集合である．

証明　$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U) = (C_\nu^\infty(U))^\#$ だから，$\{f_n^\#\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ が $\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の位相で収束したとして，$\lim_{n\to\infty} f_n^\# \in (C_\nu^\infty(U))^\#$ をまず示そう．

$$f_n^\#(p) = \sum \frac{1}{\alpha!}(\partial_z^\alpha f_n)(p)(\tilde{\boldsymbol{Z}}\odot)^\alpha$$

だから，各 $\{\partial^\alpha f_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ は U 上で広義一様収束するわけで，これは $C_\nu^\infty(U)$ の元の列 $\{f_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ が C^∞ 位相で収束することを意味する．$C_\nu^\infty(U)$ は完備だから，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ とすると $f \in C_\nu^\infty(U)$ であり，かつ，

$$\lim_{n\to\infty} \partial_z^\alpha f_n = \partial_z^\alpha f$$

となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} f_n^\# = f^\# \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ となる．

定理 3 より，$\mathcal{P}_\nu(U)$ は $C_\nu^\infty(U)$ の中で稠密で，ワイル接続

$$\#:\quad C_\nu^\infty(U) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U) \quad (\subset \Gamma(\boldsymbol{W}_U))$$

が連続写像であることは容易にわかるから，$\mathcal{P}_\nu(U)^\#$ は $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ の中で稠密である．□

上の定理により，$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の中で $\mathcal{P}_\nu(U)^\#$ の閉包 (closure) を作ればそれ

が $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ であることがわかる．$\mathcal{P}_\nu(U)^\#$ は **5°** で考えたワイル多項式全体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)$ と同じであるから，ワイル関数の全体は $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)$ を $\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の位相で完備化して得られる代数であると言っても良い．特に $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ の元は $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_U)$ の元で広義一様に近似できる．

この節の最後に，直積位相の練習もかねて，次の定理を証明しておこう：

定理 5 $\boldsymbol{W}_{(1)}$ の元 $X'_1, \cdots, X'_r, Y'_1, \cdots, Y'_r, Z'_1, \cdots, Z'_s$ が，

$$[X'_i, X'_j] = -\nu\delta_{ij},$$

$$[X'_i, X'_j] = [Y'_i, Y'_j] = [X'_i, Z'_l] = [Y'_j, Z'_l] = [Z'_l, Z'_m] = 0$$

をみたし，かつ $X'_1, \cdots, X'_r, Y'_1, \cdots, Y'_r, Z'_1, \cdots, Z'_s$ の $\boldsymbol{W}(1)$-成分が $\boldsymbol{W}(1)$ を張るならば，$\boldsymbol{\Phi}(X_i) = X'_i$, $\boldsymbol{\Phi}(Y_j) = Y'_j$, $\boldsymbol{\Phi}(Z_l) = Z'_l$, $\boldsymbol{\Phi}(\nu) = \nu$ と定義すると，$\boldsymbol{\Phi}$ は $(\boldsymbol{W}_{2r}, *)$ から $(\boldsymbol{W}_{2r}, *)$ の上への同形写像に一意的に拡張される．

証明 $\boldsymbol{\Phi}$ が $\boldsymbol{W}'_{2r}$ から $\boldsymbol{W}_{2r}$ への準同形写像に一意的に拡張されるのは明らかであろう．しかも，$X'_i, Y'_j, Z'_l \in \boldsymbol{W}_{(1)}$ で $\boldsymbol{W}_{(k)} = (\boldsymbol{W}_{(1)})^k$ だから，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{W}_{(k)} \cap \boldsymbol{W}'_{2r}) \subset \boldsymbol{W}_{(k)}$ となり，$\boldsymbol{\Phi}$ は直積位相に関して連続となる．$\boldsymbol{W}'_{2r}$ は $\boldsymbol{W}_{2r}$ の中で稠密だから $\boldsymbol{\Phi}$ は $\boldsymbol{W}_{2r}$ から $\boldsymbol{W}_{2r}$ への写像に拡張される．

$\boldsymbol{\Phi}(a) = 0$ だとすると，$a = \sum_{l=0}^{\infty} a_l$, $a_l \in \boldsymbol{W}(l)$ と分解し，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{W}_{(k)}) \subset \boldsymbol{W}_{(k)}$ を使えば，$a_l = 0$ が $l = 0, 1, 2, \cdots$ の順にわかっていくから，$\boldsymbol{\Phi}(a) = 0$ なら $a = 0$ である．これで $\boldsymbol{\Phi}$ が単射であることがわかる．

$\boldsymbol{\Phi}$ が全射であることを示すために，$(\tilde{Z}'_1, \cdots, \tilde{Z}'_n) = (X'_1, \cdots, X'_r, Y'_1, \cdots, Y'_r, Z'_1, \cdots, Z'_s)$ とおき，

$$\tilde{Z}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \tilde{Z}_j + \sum_{2l+|\alpha|\geq 2} a_{l\alpha}\nu^l(\tilde{\boldsymbol{Z}}^*)^\alpha$$

と書けば，仮定より $\det(a_i^j) \neq 0$ がわかるから，上の式は逐次代入法により，$\tilde{Z}_1, \cdots, \tilde{Z}_n$ に関して逆に解ける．これより，$\boldsymbol{W}_{2r}$ の任意の元は $\tilde{Z}'_1, \cdots, \tilde{Z}'_n$ を使って書くことができることがわかり，$\boldsymbol{\Phi}$ が全射であることが容易にわかる．□

7° ワイル同相写像

$\boldsymbol{W}_{2r}$ を前節と同じ（形式的）ワイル代数とする．U, U' を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし，**5°** でやったように自明な代数束 $\boldsymbol{W}_U$, $\boldsymbol{W}_{U'}$ を考える．少し用語の定義をしよう．

（a）　写像 Φ: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ が **束準同形写像** であるとは，任意の $p \in U$ に対し，$\varphi(p) \in U'$ が定まり，$\Phi(\{p\} \times \boldsymbol{W}_{2r}) \subset \{\varphi(p)\} \times \boldsymbol{W}_{2r}$ であり，Φ_p: $\boldsymbol{W}_{2r} \to \boldsymbol{W}_{2r}$ を $\Phi(p\,;a) = (\varphi(p)\,;\,\Phi_p(a))$ により定義したとき，これが $(\boldsymbol{W}_{2r}, *)$ から $(\boldsymbol{W}_{2r}, *)$ への準同形写像になっている場合を言う．Φ がさらに，$\Phi(p\,;\nu) = (\varphi(p)\,;\nu)$ となるとき，ν-**束準同形写像** と呼ぶ．φ: $U \to U'$ を，Φ から底空間に引起される写像と呼ぶ．Φ のことを φ の **引上げ**（lift）と呼ぶこともあるが，φ を定めても Φ が一意的にきまるわけではない．Φ が全単射のとき **束同形写像** と言う．

束同形 Φ: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ は Φ が引起す写像 φ: $U \to U'$ が連続ならば $U \times \boldsymbol{W}_{2r}$ から $U' \times \boldsymbol{W}_{2r}$ への連続写像となることが，**6°** 定理1を用いて示される．

（b）　$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$, $\Gamma(\boldsymbol{W}_{U'})$ を $\boldsymbol{W}_U$, $\boldsymbol{W}_{U'}$ の連続な切断全体とする．連続な束同形写像 Φ: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ が与えられたとき，$S \in \Gamma(\boldsymbol{W}_{U'})$ の Φ による **引戻し**（pull back）$\Phi^* S \in \Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ とは，

（1）　$$(\Phi^* S)(p) = \Phi^{-1}(S(\varphi(p))), \qquad p \in U,$$

のことである．ただし，φ は Φ より引起される写像で，仮定によりこれは連続となる．

（c）　束同形 Φ: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ が，ν を $\Gamma(\boldsymbol{W}_{U'})$ の元と見て，$\Phi^*(\nu) = \nu$ となるとき，ν-**束同形** と呼ぶ．ν-束同形 Φ: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ が，$\Phi^* \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ をみたし，かつ任意の $f \in C_\nu^\infty(U')$ について，

（2）　$$(\Phi^* f^\#)(p) = (\varphi^* f)^\#(p) \qquad \mathrm{mod}\ \nu^2$$

が成立するとき，**ワイル同相写像**(Weyl diffeomorphism)と呼ぶ．ただし，φ: $U \to U'$ は $\boldsymbol{\Phi}$ により引起される写像で，$\varphi^* f$ は φ による $f \in C_\nu^\infty(U')$ の引戻し，$(\varphi^* f)(p) = f(\varphi(p))$ である．したがって (2) が意味を持つためには φ: $U \to U'$ が C^∞ 級写像でなければならないが，このことは $\boldsymbol{\Phi}^* \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ より保証される．

しかも，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U) = C_\nu^\infty(U)^\#$ は，$C^\infty(U)$ の変形であり，ポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ はその第1項に現われるものであったから，U, U' は自然にポアソン多様体と考えられ，φ: $U \to U'$ はポアソン同形写像になっている．

U, U' 上の標準座標系をそれぞれ

$$(\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n) = (x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s)$$

$$(\tilde{z}_1', \cdots, \tilde{z}_n') = (x_1', \cdots, x_r', y_1', \cdots, y_r', z_1', \cdots, z_s')$$

とし，ワイル座標関数を，$(\tilde{\zeta}_1, \cdots, \tilde{\zeta}_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \cdots, \eta_r, \zeta_1, \cdots, \zeta_s)$, $(\tilde{\zeta}_1', \cdots, \tilde{\zeta}_n') = (\xi_1', \cdots, \xi_r', \eta_1', \cdots, \eta_r', \zeta_1', \cdots, \zeta_s')$ とする．次の補題は少し長い述べ方だが便利なものである：

補題 1 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ の元 $\tilde{\varphi}_1^\#, \cdots, \tilde{\varphi}_n^\#$, ($\tilde{\varphi}_a \in C_\nu^\infty(U)$, $1 \leqq a \leqq n$) が，

$$[\tilde{\varphi}_i^\#, \tilde{\varphi}_j^\#] = [\tilde{\varphi}_{r+i}^\#, \tilde{\varphi}_{r+j}^\#] = 0, \qquad [\tilde{\varphi}_i^\#, \tilde{\varphi}_{r+j}^\#] = -\nu\delta_{ij}$$

$$(3) \qquad\qquad (1 \leqq i, j \leqq r)$$

$$[\tilde{\varphi}_a^\#, \tilde{\varphi}_{2r+l}^\#] = 0 \qquad (1 \leqq a \leqq n,\ 1 \leqq l \leqq s)$$

をみたし，かつ $\tilde{\varphi}_a$ は ν に関して展開したとき ν^1 の項を含まず，さらに ν^0 の項 φ_a を並べて $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ とし，これを U から $\boldsymbol{R}^n$ への写像と見る，つまり

$$(4) \qquad \varphi^* \tilde{z}_a' = \varphi_a(\tilde{\boldsymbol{z}}) \qquad (1 \leqq a \leqq n)$$

としたとき，φ が U から U' への C^∞ 同相を与えるならば，

$$(5) \qquad \boldsymbol{\Phi}(p;\ \tilde{\varphi}_a^\#(\tilde{\boldsymbol{\zeta}})(p)) = (\varphi(p);\ \tilde{\zeta}_a'(\varphi(p))) \qquad (1 \leqq a \leqq n)$$

によってワイル同相写像 $\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ が定義される．

証明　まず，$f, g \in C^\infty(U)$ に対し，

$$(6)\qquad [f^\#, g^\#] = \nu(\{f, g\})^\# \qquad (\mathrm{mod}\ \nu^2)$$

であることに注意する．$\tilde{\varphi}_a$ が ν^1 の項を含まないから，

$$(7)\qquad \tilde{\varphi}_a{}^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(p) = \varphi_a(p) + \sum_{b=1}^{n}(\partial_b\varphi_a)(p)\tilde{Z}_b \qquad (\mathrm{mod}\ \nu^2)$$

であり，(3) と (6) から，φ: $U \to U'$ がポアソン同形であることがわかる．さらに $\tilde{Z}''_a = \tilde{\varphi}_a{}^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(p) - \varphi_a(p)$ ($1 \leqq a \leqq n$) とすれば (3) により，$\tilde{Z}''_a$ ($1 \leqq a \leqq n$) が前節の定理5の条件をみたすから，$\boldsymbol{\Phi}_p(\tilde{Z}''_a) = \tilde{Z}_a$，$\boldsymbol{\Phi}_p(\nu) = \nu$ と定義すると，$\boldsymbol{\Phi}_p$ は $\boldsymbol{W}_{2r}$ から $\boldsymbol{W}_{2r}$ への ν-同形となる．$\boldsymbol{\Phi}(p\,;\,a) = (\varphi(p)\,;\,\boldsymbol{\Phi}_p(a))$ とすれば，$\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ は連続な ν-同形写像で $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ も連続となる．

一方，$\tilde{\xi}'_a(q) = \tilde{z}'_a(q) + \tilde{Z}'_a$，$\tilde{\varphi}_a{}^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(p) = \varphi_a(p) + \tilde{Z}''_a$ だから，$q = \varphi(p)$ とすれば，

$$(8)\quad (\boldsymbol{\Phi}^*\tilde{\xi}'_a)(p) = (\varphi^*\tilde{z}'_a)(p) + \boldsymbol{\Phi}_p{}^{-1}\tilde{Z}'_a = \varphi_a(\tilde{z}(p)) + \tilde{Z}''_a = \tilde{\varphi}_a{}^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(p)$$

となり，(5) の定義が ν-束同形を与えていることがわかる．(8) より，$\boldsymbol{\Phi}^*\tilde{\xi}'_a \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ だから，$\boldsymbol{\Phi}^*\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_{U'}) \subset \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ であるが，$\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ は連続だから，$\boldsymbol{\Phi}^*$: $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_{U'}) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ も $\Gamma(\boldsymbol{W}_{U'})$，$\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の位相(**6°**, (D))に関して連続となり，したがって，$\boldsymbol{\Phi}^*$ は $\mathcal{P}(\boldsymbol{W}_{U'})$ の閉包 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'})$ に一意的に拡張される．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ は $\Gamma(\boldsymbol{W}_U)$ の閉集合だから，$\boldsymbol{\Phi}^*\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'}) \subset \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ を得る．$\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ について同様に考えれば，$\boldsymbol{\Phi}^*\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ を得る．　□

定理　上の記号で，さらに任意の $\boldsymbol{z}'_0 = (z'_1, \cdots, z'_s)$ に対し，$U'_{z'_0} = \{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in U'\,;\, \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}'_0\}$ とし，$U'_{z'_0}$ は ϕ (空集合) または，$2r$ 次元の単位開球 $\{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')\,;\, \|\boldsymbol{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{y}'\|^2 < 1\}$ と同位相であるとする．このとき，任意のポアソン同形写像 φ: $U \to U'$ に対して，ワイル同相写像 $\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{W}_U \to \boldsymbol{W}_{U'}$ で，$\boldsymbol{\Phi}$ の引起す写像が φ となるようなものが存在する．($\boldsymbol{\Phi}$ を φ のリフト (lift) と呼ぶが，一意的にきまるわけではない．)

証明　証明にはパラメーター付のポアンカレの補題を用いるがこの補題については，例えば，拙著，無限次元リー群論 (紀伊國屋，数学叢書 15) p. 51，などを参照してもらいたい．

φ: $U \to U'$ をポアソン同形写像とする．定義より，φ^*: $C^\infty(U') \to C^\infty(U)$ は $\{\varphi^* f, \varphi^* g\} = \varphi^*\{f, g\}$, $f, g \in C^\infty(U')$ をみたす．$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n) = (x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s)$, $\tilde{z}' = (\tilde{z}'_1, \cdots, \tilde{z}'_n) = (x'_1, \cdots, x'_r, y'_1, \cdots, y'_r, z'_1, \cdots, z'_s)$ とし，$\varphi^* \tilde{z}'_i = \varphi_i(\tilde{z})$ とすれば，$\{\tilde{z}'_i, \tilde{z}'_j\} = \{\varphi_i(\tilde{z}), \varphi_j(\tilde{z})\}$ が成立する．積公式より，

$$(9) \qquad [f^\#(\tilde{\xi}), g^\#(\tilde{\xi})] = 2\Big(f(\tilde{z}) \sinh \frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_y \cdot \overrightarrow{\partial}_x - \overleftarrow{\partial}_x \cdot \overrightarrow{\partial}_y) g(\tilde{z})\Big)^\#$$

であることに注意して，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ のワイル接続 $\varphi_1{}^\#, \cdots, \varphi_n{}^\#$ を作り [,] を計算すると，次の式が成立する：

$$(10) \qquad \begin{cases} [\varphi_i{}^\#, \varphi_j{}^\#] = \nu^3 a_{ij}^{(3)}(\tilde{z})^\# + \cdots + \nu^{2l+1} a_{ij}^{(2l+1)}(\tilde{z})^\# + \cdots \\ \qquad\qquad (1 \leqq i, j \leqq r \text{ or } r+1 \leqq i, j \leqq 2r) \\ [\varphi_i{}^\#, \varphi_{r+j}{}^\#] = -\nu\delta_{ij} + \nu^3 a_{i,r+j}^{(3)}(\tilde{z})^\# + \cdots \\ \qquad\qquad + \nu^{2l+1} a_{i,r+j}^{(2l+1)}(\tilde{z})^\# + \cdots \\ \qquad\qquad (1 \leqq i, j \leqq r) \\ [\varphi_a{}^\#, \varphi_{2r+j}{}^\#] = 0 \qquad (1 \leqq a \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq s) \end{cases}$$

となることがわかる．最後の式は，$z'_1, \cdots, z'_s$ が { , } に関する center の元であり，したがって，φ_{2r+i} が $z_1, \cdots, z_s$ のみの関数であることによる．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ におけるヤコビ恒等式より

$$(11) \quad [\varphi_a{}^\#, [\varphi_b{}^\#, \varphi_c{}^\#]] + [\varphi_b{}^\#, [\varphi_c{}^\#, \varphi_a{}^\#]] + [\varphi_c{}^\#, [\varphi_a{}^\#, \varphi_b{}^\#]] = 0 \qquad (1 \leqq a, b, c \leqq 2r)$$

だから，(9), (10) を用いて ν^4 の項を計算すると，

$$(12) \quad \{\varphi_a(\tilde{z}), a_{b,c}^{(3)}(\tilde{z})\} + \{\varphi_b(\tilde{z}), a_{ca}^{(3)}(\tilde{z})\} + \{\varphi_c(\tilde{z}), a_{ab}^{(3)}(\tilde{z})\} = 0 \qquad (1 \leqq a, b, c \leqq 2r)$$

となる．$\tilde{z}'_a = \varphi_a(\tilde{z})$ だから，$\varphi^{*-1} a_{ab}^{(3)} = b_{ab}^{(3)}(\tilde{z}')$ とすると上式は，

$$(13) \quad \{\tilde{z}'_a, b_{bc}^{(3)}\} + \{\tilde{z}'_b, b_{ca}^{(3)}\} + \{\tilde{z}'_c, b_{ab}^{(3)}\} = 0 \qquad (1 \leqq a, b, c \leqq 2r)$$

となる．ただし，$b_{ab}^{(3)} = -b_{ba}^{(3)}$ である．$\{f, g\}$ の定義を使い，$\{z'_l, C^\infty(U')\} = \{0\}$ $(1 \leqq l \leqq s)$ に注意して (13) を詳しく見ると，

$$
(14)\quad \begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial y'_i}b^{(3)}_{jk}-\dfrac{\partial}{\partial y'_j}b^{(3)}_{ki}-\dfrac{\partial}{\partial y'_k}b^{(3)}_{ij}=0 \\
\dfrac{\partial}{\partial x'_i}b^{(3)}_{r+j,r+k}+\dfrac{\partial}{\partial x'_j}b^{(3)}_{r+k,r+i}+\dfrac{\partial}{\partial x'_k}b^{(3)}_{r+i,r+j}=0 \\
-\dfrac{\partial}{\partial y'_i}b^{(3)}_{j,r+k}-\dfrac{\partial}{\partial y'_j}b^{(3)}_{r+k,i}+\dfrac{\partial}{\partial x'_k}b^{(3)}_{ij}=0 \\
\dfrac{\partial}{\partial x'_i}b^{(3)}_{j,r+k}-\dfrac{\partial}{\partial y'_j}b^{(3)}_{r+k,r+i}+\dfrac{\partial}{\partial x'_k}b^{(3)}_{r+i,j}=0
\end{cases}
\qquad (1\leqq i,\ j,\ k\leqq r)
$$

という式になる．そこで，2次の微分形式*)

$$
(15)\quad \omega'=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}(b^{(3)}_{r+i,r+j}dx'_i\wedge dx'_j-2b^{(3)}_{r+i,j}dx'_i\wedge dy'_j+b^{(3)}_{ij}dy'_i\wedge dy'_j)
$$

を変数 $z'_1, \cdots, z'_s$ をパラメーターとして，$U'_{z'_0}$ 上で考えて外微分してみれば，(14) 式より，

$$
(16)\qquad d\omega'=0
$$

であることがわかる．$U'_{z'_0}$ は単位開球と同相だから，U' 上の C^∞ 級1次微分形式 $\theta'=\sum_{i=1}^{r}(\theta'_i dx'_i+\theta'_{r+i}dy'_i)$ があって，z' をパラメーターと考えて外微分すると，

$$
(17)\qquad d\theta'=\omega'
$$

となるようにできることが，ポアンカレの補題を用いて示せる．そこで，

$$
(18)\qquad \theta_j=\varphi^*\theta'_j \qquad (1\leqq j\leqq 2r)
$$

とおき，φ の代りに次のような $\varphi^{(1)}$ を定義する：

$$
(19)\qquad \varphi^{(1)}_a(\tilde{z})=\begin{cases}
\varphi_j(\tilde{z})+\nu^2\theta_{r+j}(\tilde{z}) & \\
\varphi_{r+j}(\tilde{z})-\nu^2\theta_j(\tilde{z}) & (1\leqq j\leqq r) \\
\varphi_{2r+l}(\tilde{z}) & (1\leqq l\leqq s)
\end{cases}
$$

これを用いて (10) 式を計算すれば，ν^3 の項が消えてしまい，$\nu\delta_{ij}$ の次は ν^5 の項から始まる式が得られる．

そこで,今度は $a^{(3)}_{ij}$ に代って $a^{(5)}_{ij}$ について上と全く同じ操作を繰返して ν^5 の項も消してしまう．以下，$\nu^7, \nu^9, \cdots$ の項について同じことを繰返す．このようにして $C_\nu^\infty(U)$ の元 $\tilde{\varphi}_1, \cdots, \tilde{\varphi}_n$ で，$\tilde{\varphi}_a=\varphi_a \bmod \nu^2$ であり，かつ

---

*）　微分形式については，拙著：多変数の微分積分，数学シリーズ，裳華房，参照．

$$(20)\quad \begin{cases} [\tilde{\varphi}_i{}^{\#},\ \tilde{\varphi}_j{}^{\#}] = [\tilde{\varphi}_{r+i}{}^{\#},\ \tilde{\varphi}_{r+j}{}^{\#}] = 0, \qquad [\tilde{\varphi}_i{}^{\#},\ \tilde{\varphi}_{r+j}{}^{\#}] = -\nu\delta_{ij} \\ \hfill (1 \leqq i, j \leqq r) \\ [\tilde{\varphi}_a{}^{\#},\ \tilde{\varphi}_{2r+l}{}^{\#}] = 0 \qquad (1 \leqq a \leqq n,\ 1 \leqq l \leqq s) \end{cases}$$

となるものが作れる．これに補題１を使えば良い． □

8° ワイル多様体

“関数”と“同相写像”の概念が確定すれば，それに応じて“多様体”の概念も確定する．そこで，**4°〜7°** を使って，この節でワイル多様体なるものを定義し，その性質を調べよう．

M を n 次元，パラコンパクト，C^∞ 多様体とし，M 上に，$\boldsymbol{W}_{2r}$ と同形なファイバーを持つ局所自明な代数束 $\boldsymbol{W}_M$ を考える．M の部分集合 S に対して，S の点の所にあるファイバーのみを集めたものを，$\boldsymbol{W}_M \mid S$ または $\boldsymbol{W}_S$ と書くことにする．$\boldsymbol{W}_M$ が局所自明ということは，M の各点 p に対して p の開近傍 V_p と，$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U_p とがあって，$\boldsymbol{W}_M \mid V_p$ と $\boldsymbol{W}_{U_p} = U_p \times \boldsymbol{W}_{2r}$ とが束同形になっている場合を言う．

このことをもう少し別の述べ方をしてみよう．まず，各点に対して V_p があるのだから，M はこのような開集合で覆われている．そこで開集合の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = M$ となるものを考え，これを M の **被覆** と呼ぶ．さらに，各 V_λ に対し，$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U_λ があって，$\boldsymbol{W}_M \mid V_\lambda$ は $\boldsymbol{W}_{U_\lambda}$ に束同形であるとし，その同形写像を

$$\Phi_\lambda:\quad \boldsymbol{W}_M \mid V_\lambda \to \boldsymbol{W}_{U_\lambda}$$

とし，Φ_λ が引起す写像を φ_λ: $V_\lambda \to U_\lambda$ とする．$\{V_\lambda, \Phi_\lambda, U_\lambda\}$ を $\boldsymbol{W}_M$ の **局所自明化** とか **局所座標系** と呼ぶこともある．

$\boldsymbol{W}_M$ の局所自明化の族 $\{V_\lambda, \Phi_\lambda, U_\lambda\}$ が与えられているものとしよう．$V_\lambda \cap V_\mu \neq \phi$ のとき，$U_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda(V_\lambda \cap V_\mu)$，$U_{\mu\lambda} = \varphi_\mu(V_\lambda \cap V_\mu)$ とする．Φ_λ, Φ_μ

を $W_M \mid V_\lambda \cap V_\mu$ に制限して考えれば,

$$\Phi_\lambda:\quad W_M \mid V_\lambda \cap V_\mu \to W_{U_{\lambda\mu}}$$

$$\Phi_\mu:\quad W_M \mid V_\lambda \cap V_\mu \to W_{U_{\mu\lambda}}$$

なる束同形が得られる. そこで, 自明束の間の束同形

$$\Phi_{\lambda\mu} = \Phi_\mu \Phi_\lambda^{-1}:\quad W_{U_{\lambda\mu}} \to W_{U_{\mu\lambda}}$$

を, W_M の **局所座標変換** と呼ぶ.

定義　$V_\lambda \cap V_\mu \neq \phi$ となる $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し, 局所座標変換 $\Phi_{\lambda\mu}: W_{U_{\lambda\mu}} \to W_{U_{\mu\lambda}}$ がワイル同相写像となるとき, W_M を **ワイル多様体** と呼ぶ.

上の定義によればワイル多様体は開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ および局所自明化 $\{V_\lambda, \Phi_\lambda, U_\lambda\}$ のとり方に依存している概念である. $\Phi_{\lambda\mu}$ が引起す写像を $\varphi_{\lambda\mu}: U_{\lambda\mu} \to U_{\mu\lambda}$ とすると, $\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}$ はポアソン同形写像である(**7°**, (c) 参照).

ワイル多様体 W_M 上にはワイル関数という概念が自然に定義される. つまり, W_M の切断 f がワイル関数であるとは, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\Phi_\lambda^{-1*} f \in \mathcal{F}(W_{U_\lambda})$ となる場合を言う. W_M 上のワイル関数の全体を $\mathcal{F}(W_M)$ と書く.

定理1　ワイル多様体 W_M の底空間 M は階数 $2r$ のポアソン多様体である. M を W_M の **底にある** ポアソン多様体と呼ぶ.

証明　$\varphi_{\lambda\mu}^*: C^\infty(U_{\mu\lambda}) \to C^\infty(U_{\lambda\mu})$ はポアソン環の同形であるから, $\{\varphi_{\lambda\mu}^* f, \varphi_{\lambda\mu}^* g\} = \varphi_{\lambda\mu}^* \{f, g\}$ が成立する. 一方 $\{\ ,\ \}$ は U_λ の各点 p において, 階数 $2r$ の歪対称双線形写像

$$\{\ ,\ \}_p^{(\lambda)}:\quad T_p^* U_\lambda \times T_p^* U_\lambda \to \mathbf{R} \qquad (\text{第2章 } \mathbf{7°} \text{ 参照})$$

を定義している. 上のことは, $\varphi_{\lambda\mu}(p) = q$ のとき, $\{\ ,\ \}_p^{(\lambda)}$ と $\{\ ,\ \}_q^{(\mu)}$ とが $\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1}$ なる座標変換を通して互いに移り合うことを示すので, M の各点に $\{\ ,\ \}_p$ なる $T_p^* M \times T_p^* M$ から $\mathbf{R}$ への歪対称双線形写像が定義できたことになる. これが $C^\infty(M)$ 上のポアソン括弧であることは, これを局所座標系 $(V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda)$ で表

示してみれば，U_λ 上のもともとの $\{\ ,\ \}$ となるのだから，自明なことである． □

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に位相を入れるには次のようにする： まず底空間の座標変換 $\varphi_{\lambda\mu}$ が連続だから，**6°** 定理 1 により $\Phi_{\lambda\mu}$ も $\Phi_{\mu\lambda}$ も連続であり，これより $\boldsymbol{W}_M$ は自然に位相空間となる．$\Gamma(\boldsymbol{W}_M)$ を $\boldsymbol{W}_M$ の連続な切断の全体とし，これに広義一様位相を入れる(**6°**, (D) 参照)．これを多様体上で考えるときには，M の任意のコンパクト部分集合 K を考えるのでなしに，いずれかの V_λ に含まれるような K だけを考えて，そういう任意の K 上での一様収束で $\Gamma(\boldsymbol{W}_M)$ の列の収束を定義するのである．**6°** の定理 4 を使えば，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ が $\Gamma(\boldsymbol{W}_M)$ の閉部分環であることがわかる．

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は $C^\infty(M)$ の変形（deformation）と考えられる非可換代数であり，感覚的にはワイル関数をあたかも普通の関数のごとく考えてしまうのだが，非可換性に十分注意しなければいけない．

各 $\boldsymbol{W}_{U_\lambda}$ 上では，$[\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda}), \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})] \subset \nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})$ が成立することはワイル座標関数の基本関係式より明らかだから

(1) $$[\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M),\ \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)] \subset \nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$$

が成立する．$\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の両側イデアルで，かつ閉部分集合だから，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は可換な位相代数となる．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})/\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda}) \cong C^\infty(U_\lambda)$ は明らかだから，これを使えば

(2) $$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \cong C^\infty(M) \qquad (代数としての同形)$$

であることも容易にわかる．さらに，$\nu^2\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ も閉両側イデアルであって，線形空間としては

(3) $$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\nu^2\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \cong C^\infty(M) \oplus \nu C^\infty(M)$$

が成立するから，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の積 $*$ を $C^\infty(M) \oplus \nu C^\infty(M)$ の方に持込むことができる．ここでは $\nu^2 = 0$ として計算しなければならないが，積は次式で与えられる：

(4) $$(f+\nu f')*(g+\nu g')=f\cdot g+\nu\Big(\frac{1}{2}\{f,\ g\}+f\cdot g'+f'\cdot g\Big).$$

一方, (1) より, $\frac{1}{\nu}[\ ,\ ]$ は $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\times\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ から $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ への双線形写像を定義する. ただし $\frac{1}{\nu}$ とあるのは, $[f,\ g]$ が $\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の元だから, この ν を取除いて考えるという意味である.

この

(5) $$\frac{1}{\nu}[\ ,\ ]:\ \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\times\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\to\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$$

によって, $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ はリー環にもなっている. $f\in\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に対して $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f)=\frac{1}{\nu}[f,\ \ ]$ とすると, $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f):\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\to\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は微分 (derivation) である. つまり,

(6) $$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f)(g*h)=\Big(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f)(g)\Big)*h+g*\Big(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f)(h)\Big)$$

が成立する. $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ のすべての元と可換な元の全体を $\mathcal{Z}$ と書き, $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の **中心** (center) と呼ぶ. $\mathcal{Z}$ は可換な閉部分環であるが, $\mathcal{Z}$ の任意の元 h は無論 $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M))(h)=\{0\}$ をみたす.

次の例によって, ワイル多様体がどのようなものか つかんでほしい.

例 $sl(2,\ \boldsymbol{R})$ を $SL(2,\ \boldsymbol{R})$ のリー環, つまり跡 (trace) が 0 の 2×2 実行列の全体とする. $sl(2,\ \boldsymbol{R})^*$ を $sl(2,\ \boldsymbol{R})$ の相対空間とし, 開集合 $M=sl(2,\ \boldsymbol{R})^*-\{0\}$ を考える. 第 I 部 3 章 **11°** により, M はポアソン多様体となるが, 階数が恒等的に 2 であることも容易にわかる. M 上に, $r=1$, $s=1$ の (形式的) ワイル代数 $\boldsymbol{W}_2$ をファイバーにする代数束 $\boldsymbol{W}_M$ を作り, これがワイル多様体になるようにしてみよう.

まず $sl(2,\ \boldsymbol{R})$ の基底 $H,\ X_+,\ X_-$ を $[H,\ X_\pm]=\pm X_\pm$, $[X_+,\ X_-]=H$ となるようにとり, これを M 上の 1 次関数と思う. 次に, M の開集合 $V_+=\{X_->0\}$, $V_-=\{X_-<0\}$, $V_r=M-\Big\{H=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_++X_-)=0\Big\}$ を考えれば $M=V_+\cup V_-\cup V_r$ (開被覆) となる. $V_\pm$ は $\boldsymbol{R}^3$ と同位相, V_r は $\boldsymbol{R}^3$ から原点を通る直線を除いたものである. $V_+,\ V_-,\ V_r$ 毎に局所座標系を構成しよう.

(a) $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3}=\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{W}_2$ 上のワイル座標関数を ξ,η,ζ とし，**5°** の (D) にしたがって，$H=\xi$，$X_+=\dfrac{1}{2}e^{-\eta}\circ(\zeta-\xi^2)$，$X_-=e^{\eta}$ とおく．

$\xi=x+X$，$\eta=y+Y$，$\zeta=z+Z$ としてみれば，

$$V_+=\left\{\left(x,\ \frac{1}{2}e^{-y}(z-x^2),\ e^y\right);\ (x,\ y,\ z)\in\boldsymbol{R}^3\right\}$$

だから，(ξ,η,ζ) を V_+ を覆う座標関数と考える．

(b) 同じ $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3}$，$\xi,\eta,\zeta$ を使って，

$$H=\xi,\qquad X_+=-\frac{1}{2}e^{-\eta}\circ(\zeta-\xi^2),\qquad X_-=-e^{\eta}$$

とすると，こんどは V_- の部分を覆う座標関数となる．

(c) $U=\{(x,\ y,\ z)\in\boldsymbol{R}^3;\ z+x^2>0\}$ とし，$\boldsymbol{W}_U$ 上のワイル関数

$$\xi,\qquad (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\cos\eta,\qquad (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\sin\eta$$

を考える．ただし，$(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}=((z+x^2)^{\frac{1}{2}})^{\#}$，$\cos\eta=(\cos y)^{\#}$ などである．積公式より容易に，

$$[\xi,\ (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\sin\eta]=-\nu(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\cos\eta,$$

$$[\xi,\ (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\cos\eta]=\nu(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\sin\eta$$

がわかる．$\sin\eta=\dfrac{1}{2i}(e^{i\eta}-e^{-i\eta})$，$\cos\eta=\dfrac{1}{2}(e^{i\eta}+e^{-i\eta})$ と積公式を用いて少し長い計算を行うと，

$$[(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\sin\eta,\ (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\cos\eta]=-\nu\xi$$

であることもわかるので，

$$\frac{X_+-X_-}{\sqrt{2}}=\xi,\qquad \frac{X_++X_-}{\sqrt{2}}=(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\cos\eta,\qquad H=(\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\sin\eta$$

とおけば，$sl(2,\boldsymbol{R})$ が得られていることがわかる．

整数 $\boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{W}_U$ に $(\xi,\eta,\zeta)\mapsto(\xi,\eta+2\pi l,\zeta)$，$l\in\boldsymbol{Z}$，で作用させ，$\boldsymbol{Z}$-不変なワイル関数のみを考えることにすれば，これが，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{\tilde{U}}=\tilde{U}\times\boldsymbol{W}_2$ 上のワイル関数全体となる．ただし，$\tilde{U}$ は，$\boldsymbol{Z}$ を U に $(x,\ y,\ z)\mapsto(x,\ y+2\pi l,\ z)$ で作用させたとき，$\tilde{U}=\boldsymbol{Z}\backslash U$ で定義される多様体である．$\tilde{U}$ と V_r とを写像

$$\frac{X_+ - X_-}{\sqrt{2}} = x\,, \qquad \frac{X_+ + X_-}{\sqrt{2}} = (z+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos y\,, \qquad H = (z+x^2)^{\frac{1}{2}}\sin y$$

（ただし，H, $X_\pm$ は M 上の1次式と見ている）によって対応させれば，これで V_r 上のワイル関数環を定義したことになっている．

上のようにして得られた3個のワイル多様体を順に，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^+}$, $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^-}$, $\boldsymbol{W}_{\tilde{U}}$ としよう．これらを貼り合わせて M 上のワイル多様体を作るには座標変換を計算しなければならないが，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^+}$ と $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^-}$ は共通部分がないから $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^+}$ と $\boldsymbol{W}_{\tilde{U}}$, $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^-}$ と $\boldsymbol{W}_{\tilde{U}}$ の間の座標変換がワイル同相写像として定義できれば良い．

$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^3{}^+}$ と $\boldsymbol{W}_{\tilde{U}}$ の間の座標変換を求めるには，

$$(*)\quad \begin{cases} \xi' = (\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\ \sin\eta \\ e^{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}((\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\ \cos\eta - \xi) \\ \dfrac{1}{2}e^{-\eta'}\circ(\zeta'-\xi'^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}((\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\ \cos\eta + \xi) \end{cases}$$

という式から，(ξ', η', ζ') を (ξ, η, ζ) で表わす式を求めたり，逆に $(\xi, \zeta, \cos\eta, \sin\eta)$ を (ξ', η', ζ') で表わす式を求めたりできれば良い．これを実行するにはまず，

$$e^{-\eta'}\circ(\zeta'-\xi'^2) = e^{-\eta'}\odot\left(\zeta'-\xi'^2+\nu\xi'-\frac{1}{2}\nu^2\right)$$

に注意し，$\eta' = \log e^{\eta'}$ を使えば (ξ', η', ζ') が (ξ, η, ζ) のワイル関数として求まる．これを逆に解くには，まず ξ を求め，

$$((\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\ \sin\eta)^{\odot 2} + ((\zeta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\odot\ \cos\eta)^{\odot 2} = \zeta+\xi^2$$

（ただし $\odot 2$ は $\odot$-積による2乗）に注意して，ζ を求めこれを使って $\sin\eta$, $\cos\eta$ を求めれば良い．

以上によって，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ が定義されたことになる．定義のしかたより，$\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は $\{H, X_+, X_-\}$ と基本交換関係

$$[H, X_+] = \nu X_+\,, \qquad [H, X_-] = -\nu X_-\,, \qquad [X_+, X_-] = \nu H$$

によって生成される代数（$\nu=1$ のときには $sl(2, \boldsymbol{R})$ の普遍展開環）を稠密

な部分集合として含んでいる．$\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の中心 $\mathscr{Z}$ は $H^2+X_+\circ X_-$ で生成される代数の閉包で，この可換代数が定める“点”（つまり極大イデアル）と余随伴軌道とが1対1に対応している．

9° ワイル多様体 W_{T^*N} と配位空間

ワイル関数の全体というのは関数環 $C^\infty(M)$ を変形（デフォルメ）して得られる非可換環と考えられる．したがって，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ の方は底空間 M 自身をデフォルメして得られるものだと言っても良いであろう．

ところで，前節の定理1によればワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ の底空間は階数一定のポアソン多様体になっていなければならない．階数一定のポアソン多様体 M の最も典形的なものは，M がある C^∞ 級多様体 N の余接バンドル T^*N になっている場合である．第I部 2章**6°** で述べたように T^*N は自然にシンプレクティック多様体になっているからである．

この節では，まず T^*N を底空間とするワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ を作ってみよう．

N をパラコンパクト，C^∞ 級多様体とすると，N の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次の性質を持つものがとれることが知られている：

〈SC〉 任意の有限個の Λ の元 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ に対し，$V_{\lambda_1}\cap\cdots\cap V_{\lambda_k}$ は ϕ であるかまたは $\boldsymbol{R}^n$（$n=\dim N$）の単位開球と C^∞ 級同相である．（このような開被覆を単純被覆と呼ぶ．）

上の〈SC〉で特に $k=1$ の場合を考えてみれば，各 V_λ に対して，V_λ から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U_λ の上への C^∞ 同相写像 φ_λ が存在する．$\{(V_\lambda, \varphi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を N の局所座標系と考え，$\tilde{\pi}$ を T^*N から N への自然な射影とする．これらを使って T^*N の局所座標系を詳しく書いてみよう．

まず，T^*N の開被覆として $\{\bar{\pi}^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．φ_λ を V_λ から $\boldsymbol{R}^n$ の写像と考えて

$$\varphi_\lambda(q) = (\varphi_\lambda^1(q), \cdots, \varphi_\lambda^n(q)), \qquad q \in V_\lambda$$

と書き，右辺を点 q の **局所座標**，φ_λ^i を **座標関数** と呼ぶ．前の方の書き方と合わせるために φ_λ^i を x_λ^i と書いておく．$\bar{\pi}^{-1}(V_\lambda)$ の任意の元 $(q\,;\omega)$ は

$$\left(x_\lambda^1(q), \cdots, x_\lambda^n(q)\,;\ \sum_{i=1}^n p_i\, dx_\lambda^i|_q \right)$$

と表わすことができるから，$(q\,;\omega)$ に対して $U_\lambda \times \boldsymbol{R}^n$ の点

$$(x_\lambda^1(q), \cdots, x_\lambda^n(q)\,;\ p_1, \cdots, p_n)$$

を対応させ，これを点 $(q\,;\omega)$ の局所座標と考え，この対応を $T^*\varphi_\lambda$: $\bar{\pi}^{-1}(V_\lambda) \to U_\lambda \times \boldsymbol{R}^n$ と書くことにする．$(x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n)$ が局所標準座標系となるように T^*N の上にシンプレクティック多様体の構造が入っていたことを思い出してほしい．

さて，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{2n}$ を(形式的)ワイル代数とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して自明な代数束 $\boldsymbol{W}_{U_\lambda\times\boldsymbol{R}^n}$ $(= U_\lambda \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{W})$ を考える．$\{\boldsymbol{W}_{U_\lambda\times\boldsymbol{R}^n}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を貼り合わせて T^*N を底空間とするワイル多様体を作ろう．

貼り合わせを考えるために，$U_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda(V_\lambda \cap V_\mu)$ とおき，C^∞ 同相

$$\Psi_{\lambda\mu}:\ U_{\lambda\mu} \times \boldsymbol{R}^n \to U_{\mu\lambda} \times \boldsymbol{R}^n$$

を $\Psi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p}) = T^*\varphi_\mu\cdot(T^*\varphi_\lambda)^{-1}(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p})$ で定義する．$(\boldsymbol{x}_\mu, \boldsymbol{p}') = \Psi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p})$ とおき，この関係を詳しく書けば

$$(1) \qquad x_\mu^i = \varphi_\mu^i(\varphi_\lambda^{-1}(\boldsymbol{x}_\lambda)), \qquad \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j}(\boldsymbol{x}_\lambda)\, p'_i = p_j$$

である．第 2 の式を $\boldsymbol{p}'$ に関して解いて，$p'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\lambda^j}{\partial x_\mu^i} p_j$ と書いても良い．$\Psi_{\lambda\mu}$ がポアソン同形写像であることは明らかであろう．この $\Psi_{\lambda\mu}$ を **7°** の定理にしたがって $\boldsymbol{W}_{U_{\lambda\mu}\times\boldsymbol{R}^n}$ から $\boldsymbol{W}_{U_{\mu\lambda}\times\boldsymbol{R}^n}$ へのワイル同形写像に lift することを考えよう．

まず，x_μ^i, p'_i を $(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p})$ の関数と見てそれのワイル接続を $(x_\mu^i)^\#$, $(p'_i)^\#$ と

すると次の補題が成立する：

補題 1 $[(x^i_\mu)^\#, (x^j_\mu)^\#] = 0, \quad [(x^i_\mu)^\#, (p'_j)^\#] = -\nu\delta_{ij},$

$[(p'_i)^\#, (p'_j)^\#] = 0.$

証明 5°, 定理 1 の積公式を使って計算すれば, $x^i_\mu(\boldsymbol{x}_\lambda)$ には変数 $\boldsymbol{p}$ が含まれないから第 1 の式は自明である. p'_i は $\boldsymbol{p}$ に関して 1 次式だから $p_1, \cdots, p_n$ で 2 回以上微分する項は消えてしまう. したがって,

$$[(x^i_\mu)^\#, (p'_j)^\#] = -\nu(x^i_\mu(\overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{x}_\lambda}\cdot\overrightarrow{\partial}_{\boldsymbol{p}})p'_j)^\#$$

$$= -\nu\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i_\mu}{\partial x^k_\lambda}\frac{\partial x^k_\lambda}{\partial x^j_\mu}\right)^\# = -\nu\delta_{ij}$$

$$[(p'_i)^\#, (p'_j)^\#] = \nu(p'_i(\overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{p}}\cdot\overrightarrow{\partial}_{\boldsymbol{x}_\lambda} - \overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{x}_\lambda}\cdot\overrightarrow{\partial}_{\boldsymbol{p}})p'_j)^\#$$

$$= \nu\left(\sum_{k,a}\frac{\partial x^k_\lambda}{\partial x^i_\mu}\frac{\partial}{\partial x^k_\lambda}\left(\frac{\partial x^a_\lambda}{\partial x^j_\mu}\right)p_a - \sum_{k,b}\frac{\partial}{\partial x^k_\lambda}\left(\frac{\partial x^b_\lambda}{\partial x^i_\mu}\right)p_b\cdot\frac{\partial x^k_\lambda}{\partial x^j_\mu}\right)^\#$$

$$= \nu\sum_a\left(\frac{\partial^2 x^a_\lambda}{\partial x^i_\mu\partial x^j_\mu}p_a - \frac{\partial^2 x^a_\lambda}{\partial x^j_\mu\partial x^i_\mu}p_a\right)^\# = 0. \quad \square$$

上の結果と 7° の補題 1 より $\Psi_{\lambda\mu}$ の lift $\Phi_{\lambda\mu}$ が作られるのだが, それを書くために, ワイル座標関数を, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して,

$$(2)\qquad \xi^i_\lambda = (x^i_\lambda)^\#, \qquad \eta^\lambda_i = (p_i)^\# \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

により定める. 記号を簡単にするために

$$(3)\qquad \Psi_{\lambda\mu}{}^i(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p}) = x^i_\mu(\boldsymbol{x}_\lambda), \qquad \Psi_{\lambda\mu}{}^{n+i}(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k_\lambda}{\partial x^i_\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda)p_k$$

とおけば, $\Psi_{\lambda\mu} = (\Psi_{\lambda\mu}{}^1, \cdots, \Psi_{\lambda\mu}{}^{2n})$ だから, 7° の補題 1 により, $\Phi_{\lambda\mu}$: $\boldsymbol{W}_{U_{\lambda\mu}\times\boldsymbol{R}^n} \to \boldsymbol{W}_{U_{\mu\lambda}\times\boldsymbol{R}^n}$ は

$$(4)\qquad \Phi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda, \Psi_{\lambda\mu}{}^\#(\boldsymbol{\xi}_\lambda, \boldsymbol{\eta}^\lambda)(\boldsymbol{x}_\lambda)) = (\Psi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda), (\boldsymbol{\xi}_\mu, \boldsymbol{\eta}^\mu)(\Psi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{x}_\lambda)))$$

で与えられる. (3) の第 2 式より,

$$(5)\qquad \Psi_{\lambda\mu}{}^{n+i\,\#}(\boldsymbol{\xi}_\lambda, \boldsymbol{\eta}^\lambda) = \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial x^k_\lambda}{\partial x^i_\mu}\right)^\#(\boldsymbol{\xi}_\lambda)\odot\eta^\lambda_k$$

であることに注意してほしい.

$V_\lambda\cap V_\mu\cap V_\nu \neq \phi$ であるような $\lambda, \mu, \nu\in\Lambda$ に対して, $U_{\lambda\mu\nu} = \varphi_\lambda(V_\lambda\cap$

$V_\mu \cap V_\nu$) とおけば，$\boldsymbol{W}_{U_{\lambda\mu\nu}\times \boldsymbol{R}^n}$ 上では，

$$\Phi_{\lambda\mu}\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\nu\lambda} = 1 \tag{6}$$

であることが (5) を使って容易に確かめられる．(6) の性質があるから，$\Phi_{\lambda\mu}$ を $\boldsymbol{W}_{U_\lambda}$ と $\boldsymbol{W}_{U_\mu}$ の貼り合わせの写像として使うことができ，これによって $\{\boldsymbol{W}_{U_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を貼り合わせて，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ が得られる．以上をまとめて，

定理 1　パラコンパクト，C^∞ 多様体 N の余接バンドル T^*N を底空間とするワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ が存在する．

実は，任意の階数一定のポアソン多様体 M に対して，M を底空間とするワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ が存在することがわかっている*)．証明の方針は上の定理と同じであるが，一般の場合には (6) が必ずしも成立しないので $\Phi_{\lambda\mu}$ を補正して (6) が成立するように作りかえるのである．このやり方は少々こみ入っているのでここでは立入らないことにする．

ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ の存在がわかったので，ワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ が考えられる．これまでのことから大体予想はついていると思うが，実は任意のワイル多様体で次のことが成立する：

定理 2　ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ において，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ と $C_\nu^\infty(M)$ とは線形空間としては同形である．

証明　前節のワイル多様体の定義より，局所自明化の族 $\{V_\lambda, \Phi_\lambda, U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆になっている．M はパラコンパクトだから $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は必要ならば細分を考えることにより，局所有限と仮定して良い．開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に属する 1 の分解を $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする．また Φ_λ：$\boldsymbol{W}_{V_\lambda}\to \boldsymbol{W}_{U_\lambda} = U_\lambda \times \boldsymbol{W}$ が底空間に引起す写像を φ_λ：$V_\lambda \to U_\lambda$ とする．

---

*)　H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, Advance in Math. vol. 85, 1991, 224-255.

各 U_λ 上で $C_\nu^\infty(U_\lambda)$ と $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})$ とはワイル接続によって線形同形だから，このワイル接続を $\#_\lambda$: $C_\nu^\infty(U_\lambda) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})$ と表わしておく．任意の $f \in C_\nu^\infty(M)$ に対し，

$$f^\# = \sum_\lambda \Phi_\lambda^* \#_\lambda \varphi_\lambda^{-1*}(\phi_\lambda f) \tag{7}$$

と定義すれば，$f^\# \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ であり，# は $C_\nu^\infty(M)$ から $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ への線形写像であることがわかる．

これらを mod ν で考えると（つまり量子力学的効果を全く除いてしまえば）すべてはもとの可換な世界に戻るのだから，$\Phi_\lambda = \varphi_\lambda \bmod \nu$ であり，任意の $g \in C^\infty(U_\lambda)$ に対して $\#_\lambda g = g \bmod \nu$ となる．$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ から $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ への自然な写像を $\tilde{\pi}$ とすれば，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して $\tilde{\pi} f^\# = f$ が成立し，したがって $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \cong C^\infty(M)$ であることがわかる．これより，任意の $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に対して $\tilde{f} - (\tilde{\pi}\tilde{f})^\# \in \nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ がわかるから，$\tilde{f} - (\tilde{\pi}\tilde{f})^\# = \nu\tilde{g}$ とおき，$\tilde{g} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に対して同じことを繰返す．以下同様に続ければ，結局

$$\tilde{f} = (f_0 + \nu f_1 + \cdots + \nu^l f_l + \cdots)^\#$$

であることがわかる．これより $\#$: $C_\nu^\infty(M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ が線形同形写像であることがわかる． □

上の定理より，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の $*$-積を#を通じて $C_\nu^\infty(M)$ の方に持込むことができ，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を考えるということは，$C_\nu^\infty(M)$ に新しい $*$-積の構造を入れて考えるのと同じであることがわかる．しかし，#: $C_\nu^\infty(M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を作るときに M 上の 1 の分解を使ってしまったので，$C_\nu^\infty(M)$ の中の定数関数 1 が必ずしも $*$-積に関する単位元にはなっていない．つまり，一般には $1^\# \neq 1$ であることには注意する必要がある．いつ等式が成立するのかについては良くわかっていない．$f^\#$ を f の **ワイル接続** と呼ぶこともある．

T^*N 上に作ったワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ においても事情は全く同じであるが，# を上手にとって，$1^\# = 1$ となるようにできる．さらに，T^*N の場合には局所座標変換が特別の形をしているので次のような $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の部分環が存在する：

（a） ワイル座標関数 $(\xi_\lambda^1, \cdots, \xi_\lambda^n, \eta_1^\lambda, \cdots, \eta_n^\lambda)$ を用いて局所表示した

とき $(\eta_1^\lambda, \cdots, \eta_n^\lambda)$ を含まない $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の元全体.

(b) $(\xi_\lambda^1, \cdots, \xi_\lambda^n, \eta_1^\lambda, \cdots, \eta_n^\lambda)$ で局所表示したとき，適当な $f_i \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U_\lambda})$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を用いて $\sum_{i=1}^{n} f_i * \eta_i^\lambda$ の形に書ける元の全体.

(a), (b) の定義のしかたは局所的であるが，座標変換の特殊性からこれらは $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ 上で意味を持つ. (a) の部分環は可換であり，$C_\nu^\infty(N)$ に環として同形であることが容易にわかる. したがってこの部分環を $C_\nu^\infty(N)$ と書くが，これは $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の中で極大な可換部分環である. つまり，$C_\nu^\infty(N)$ を含む $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の ($*$-積に関する) 可換部分環は $C_\nu^\infty(N)$ のみである. (b) のような元の全体を $\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ とする. 積公式を持ちだすまでもなく. $\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ が $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の左イデアル，つまり，

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N}) * \mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N}) \subset \mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$$

であることがわかる. さらに $C_\nu^\infty(N) \cap \mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N}) = \{0\}$ であり，少し詳しく見ると，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})/\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ は線形空間としては $C_\nu^\infty(N)$ と同形であることがわかる.

T^*N が相空間，N が配位空間と呼ばれていたことを思いだしてほしい. $C_\nu^\infty(N)$ や，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})/\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ を考えるということは，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ という相空間の中で，配位空間にあたるものを考えることに対応しているのである.

第2章　場

電磁場とか重力場といったように「場」という概念は古典物理学の中にもたくさん登場する．これらは単位系を無視すれば数学的にはベクトル場，テンソル場と呼ばれるものであるが，このようなものは，それ以前にその容れ物としての多様体が与えられていないと書くことすらできないものである．古典的な場はすべて，何の構造も持たない土台としてだけの多様体の上に構築される上部構造として記述されているのである．

この状況に対する認識論的批判は次第に声高くなってきているのではあるが，とって代るべき数学理論の方にまだ決定打が出ていないので現状はいささか混乱している．

しかし，ワイル多様体，ワイル関数環のような考え方が，まだ古典的理解に密着しているとは言え，1つの方向を示しているように思われる．

1°　スカラー場

ベクトル解析，古典物理学に現れるスカラー場は数学的には単なる関数のことである．これは土台となるべき多様体 M が与えられないと書くことはできないが，それが与えられれば $C^\infty(M)$ の元のことだと考えて良い．$C^\infty(M)$ は可換環で，前章1°でやったように M に関する情報はすべて $C^\infty(M)$ の代数的構造の中に入っている．

ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ を考えたとき，この上のスカラー場というのはどう考えたら良いであろうか？　種々の考え方はあろうが，ここではワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の元のことであると考えることにする．

（**A**）「点」の概念とスカラー場の概念は密着しているのでまずそのことについて考察しよう．前章**1°** で M の1点 p と，$C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への準同形写像 φ_p とは同じものであることを見た．$\varphi_p(f)=f(p)$ であるから，δ-関数の定義により，$\varphi_p=\delta_p$ と書いても良いのであるが，超関数に慣れていない方のために少し復習しておこう．

M をパラコンパクト多様体とし，$C_C^\infty(M)$ を M 上の複素数値 C^∞ 級関数の全体とする．後に都合良くなるように複素数値にしてあるがそのことにこだわる必要はない．$C_C^\infty(M)$ に位相を入れて位相線形空間にするのであるが，位相の入れ方は $C^\infty(U)$ の場合と同じで，「関数列が収束する」という言葉の意味を定義することで代用する．つまり，「関数列 $\{f_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ が $f\in C_C^\infty(M)$ に収束する」というのは，M 上の任意の座標近傍 U 上で $\{f_n\mid U\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ が $f\mid U$ に U 上の C^∞ 位相に関して収束する（前章**6°**(**B**) 参照）ことだと定義する．この位相を M 上の $\boldsymbol{C^\infty}$ **位相** と呼ぶ．

$C_0^\infty(M)$ を $C_C^\infty(M)$ に属する関数でその台（support）がコンパクトなものの全体とする．$C_0^\infty(M)$ は $C_C^\infty(M)$ の線形部分空間であるが M がコンパクトでなければ，$C_C^\infty(M)$ の閉部分集合にはなり得ない．$C_0^\infty(M)$ も M 上の C^∞ 位相により位相線形空間となる．

さて，M 上の **超関数** T とは，T が $C_0^\infty(M)$ から $\boldsymbol{C}$ への連続な線形写像となっている場合を言う．T が $C_C^\infty(M)$ から $\boldsymbol{C}$ への連続線形写像のときには，T を台がコンパクトな超関数と呼ぶ．M 上の超関数の全体を $\mathcal{D}'(M)$ と書く．

例1　M の点 q を任意に固定し，δ_q: $C_0^\infty(M)\to\boldsymbol{C}$ を，$\delta_q(f)=f(q)$ と定義すると，δ_q は超関数となる．δ_q を，q に台を持つ $\boldsymbol{\delta}$ **関数** と呼ぶ．

例 2　M 上に体積要素 dV_p が与えられている場合，任意の $g \in C^\infty(M)$ に対し，$I(g)$：$C_0^\infty(M) \to \boldsymbol{C}$ を，

$$I(g)f = \int_M g(p)\,f(p)\,dV_p$$

と定義すれば，$I(g)$ は超関数である．この $I(g)$ によって，$C_C^\infty(M)$ は超関数の空間 $\mathscr{D}'(M)$ の中に埋込まれる．

定義　超関数の列 $\{T_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ が（$\mathscr{D}'(M)$ の単純位相に関して）**収束する**とは，任意の $f \in C_0^\infty(M)$ に対して，$\lim_{n\to\infty} T_n(f)$ が存在する場合を言う．この場合，$T(f) = \lim_{n\to\infty} T_n(f)$ と定義すると，$T \in \mathscr{D}'(M)$ となることが知られている．

上の定義によって $\mathscr{D}'(M)$ にも位相が入ったのであるが，実は $C_C^\infty(M)$ を例 2 のようにして $\mathscr{D}'(M)$ に埋込むと，その像は $\mathscr{D}'(M)$ の中で稠密であることもわかっている．さらに任意の $g \in C_C^\infty(M)$ に対し，$I(g) \in \mathscr{D}'(M)$ は

$$(*) \qquad I(g) = \int_M g(q)\,\delta_q\,dV_q$$

である．$I(g)$ は関数 g を超関数と見ただけのものだから（$*$）は $g = \int_M g(q)\,\delta_q\,dV_q$ のように書いても良い．積分記号を総和記号，$\{\delta_q ; q \in M\}$ をベクトル空間の基底，$g(q)$ を係数のごとく考えれば，（$*$）は任意の $C^\infty(M)$ の元は $\{\delta_q ; q \in M\}$ のある意味での 1 次結合であることを示している式である．δ_q を q の所にある「質点」と考えるならば，（$*$）式は「万物は質点系である」という思想の数学的表現でもある．

（B）　スカラー場全体 $C_C^\infty(M)$ と M の点との関係は大体上のようなものであるが，ワイル関数をスカラー場だと考えた場合にこの関係はどのようになるであろうか？

$\boldsymbol{W}_M$ をワイル多様体とし，$\boldsymbol{W}_{2r,p}$ を点 $p \in M$ におけるファイバーとし，$\boldsymbol{W}_{2r,p}$ の極大両側イデアルを $\boldsymbol{W}_{(1),p}$ とする（前章 **4°** 補題 1 参照）．$\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を

W_M 上のワイル関数環とする．

定理１　$\mathcal{F}(W_M)$ の極大両側閉イデアルに対し，M の点 p が定まり，$\mathcal{I}=\{\tilde{f}\in\mathcal{F}(W_M);\ \tilde{f}(p)\in W_{(1),p}\}$ となる．

証明　$p\in M$ に対して，$\mathcal{I}_p=\{\tilde{f}\in\mathcal{F}(W_M);\ \tilde{f}(p)\in W_{(1),p}\}$ とすると，$\mathcal{I}_p$ が極大両側イデアルでかつ閉集合であることは明らかであろう．特に $\mathcal{F}(W_M)/\mathcal{I}_p\cong \boldsymbol{R}$ が成立する．

$\mathcal{I}$ を極大両側イデアルで $\mathcal{F}(W_M)$ の閉集合とする．$\mathcal{I}\subset\mathcal{I}_p$ となるような $p\in M$ が存在しないとすると，各 $p\in M$ に対して $f_p\in\mathcal{I}$ で，$f_p(p)\notin W_{(1),p}$ となるものが存在する．適当な定数をかければ，

$$f_p=1+g_p,\qquad g_p\in\mathcal{I}_p$$

として良い．特に f_p は p の近傍では逆元を持つ．1の分解を使えば，$\mathcal{I}$ の部分集合 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，(1)　f_λ の台が局所有限，(2)　$\sum_\lambda f_\lambda=1$ となるものが作れる．ここで $\mathcal{I}$ が閉集合であることを使うと，$1\in\mathcal{I}$ となって矛盾となる．したがって，$\mathcal{I}\subset\mathcal{I}_p$ となる p があることになるが，極大性より $\mathcal{I}=\mathcal{I}_p$ でなければならない．　□

$\mathcal{F}(W_M)$ を使っても M の点は決定されることを上の定理は示しているのであるが，$\nu\mathcal{F}(W_M)=\bigcap_{p\in M}\mathcal{I}_p$ であるから，$\mathcal{F}(W_M)$ を極大両側閉イデアル全体の集合上の関数環と見ることはできない．つまり，$\mathcal{F}(W_M)$ のイデアルを使って「点」にあたるものを作ろうとしても，つかまるのは古典的な M の方だけである．

(**C**)　しからば δ 関数のごときものを使ってワイル関数を (∗) 式の意味で作りだしてしまうような構成要素は作れるであろうか？　これができればその構成要素を「点」と呼んでも良いであろう．しかし，この考えもうまくいかない．このことを以下で詳しい定義や証明は省略して説明しよう．

話を簡単にするため M の代りに $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U と，その上の自明束 W_U

で考える．$f \in C^\infty(U)$ のワイル接続 $f^\#$ は

$$f^\#(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(q) = \sum_{|\alpha| \geqq 0} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(\boldsymbol{x}(q))\,\tilde{\boldsymbol{Z}}^\alpha$$

であったから，これをそのまま超関数まで拡張して，

$$\delta_p^\#(q) = \sum_{|\alpha| \geqq 0} \frac{1}{\alpha\,!}(\partial^\alpha \delta_p)(\boldsymbol{x}(q))\,\tilde{\boldsymbol{Z}}^\alpha$$

として，これをワイル関数の中での δ 関数にあたるものだと考えてみよう．このようなワイル超関数は完全に数学的に構成することができる．$\delta_p^\#$ を **ワイル $\boldsymbol{\delta}$ 関数** と呼んでおこう．実は次のことがわかるのである：

「ワイル δ 関数は，ワイル同相写像で引戻しを行うと一般にはワイル δ 関数以外のワイル超関数に変る．」

上のことはワイル δ 関数なるものがワイル多様体上では自然に定義できないことを示している．(**B**) での結論と合わせると，このことは，「ワイル多様体はいかなる意味でも，幾何学的な点の集まりとは理解できない」ことを示しているように思われる．

(**D**)　$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ 全体を「点」の関数と思うことは難しいが，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の極大可換部分環を考えるならば話は変ってくる．ここでは $M = T^*N$ と考えてみよう．

前章 **9°** で述べたように，$C_\nu^\infty(N)$ は $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の極大可換部分環になっている．$C_\nu^\infty(N)$ は $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ に値をとる N 上の C^∞ 級関数の全体であるから，$C_\nu^\infty(N)$ を考えるという事と，幾何学的な点の集まりである N を考えるのとは同じことになる．

さらに，$\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ は $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ の左イデアルであるから，任意の $f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ に対して $f * \mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N}) \subset \mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ である．$L(f)$ を

$$L(f)(g) = f * g$$

によって定義される $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ 上の線形写像とすると，$L(f)\,\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N}) \subset$

$\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ だから, $L(f)$ は商空間 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})/\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ 上に線形写像を引起す. これを $\tilde{L}(f)$ と書こう.

$\tilde{L}(f)$ に関して次が成立することが容易にわかる:

定理 2　(i)　$\tilde{L}(af+bg)=a\tilde{L}(f)+b\tilde{L}(g), \qquad a, b \in \boldsymbol{R}.$

(ii)　$\tilde{L}(f*g)=\tilde{L}(f)\tilde{L}(g)$

(iii)　$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})=C_\nu^\infty(N)\oplus\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ を利用して, 自然に $C_\nu^\infty(N)$ と $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})/\mathcal{E}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ とを同一視しておけば, 任意の $f\in C_\nu^\infty(N)$ に対して, $\tilde{L}(f)g=fg$ である.

しかし, 一般の $f\in\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ に対して $\tilde{L}(f)$ が $C_\nu^\infty(N)$ 上のどのような作用素であるかを述べることは難しい. **3°** では作用素としての意味がはっきりしているものとして $\sum_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ という部分環を考察する.

2°　ベクトル場

通常の多様体 M においては C^∞ 級の接ベクトル場 X は接バンドル TM の C^∞ 級の切断のことであるが, 見方を変えると, これは $C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への微分, つまり,

$$X(fg)=(Xf)g+f(Xg), \qquad f, g\in C^\infty(M)$$

をみたす線形写像のことだと思うことができた. そこでワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ においても, $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ から $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ への微分 (derivation) $\tilde{X}$ で, $\tilde{X}\nu=0$ となるものを $\boldsymbol{W}_M$ 上の **接ベクトル場** と呼ぶことにする. $[\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M), \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)]\subset\nu\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に注意して, 任意の $f\in\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に対して, $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f): \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\to\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(f)g=\frac{1}{\nu}[f, g] \qquad \left(=\frac{1}{\nu}(f*g-g*f)\right)$$

で定義すれば，これは $\boldsymbol{W}_M$ 上の接ベクトル場となる．

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ と $C_\nu^\infty(M)$ とは前章 **9°** のワイル接続 # により線形同形だから，これを通して $\boldsymbol{W}_M$ の接ベクトル場を詳しく見よう．

まず，$f, g \in C^\infty(M)$ に対して $f^\# * g^\# \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を

$$(1) \qquad f^\# * g^\# = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \nu^l \pi_l(f, g) \right)^\#, \qquad \pi_l(f, g) \in C^\infty(M)$$

のように分解する．π_l は $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への連続な双線形写像であるが具体的に書くと極めて面倒な式となる．しかも π_l は 1 の分解のとり方に依存している．しかし，$\pi_0(f, g)$，$\pi_1(f, g)$ だけは書き下すことができ，前章 **8°** の (3)，(4) により

$$(2) \qquad \pi_0(f, g) = fg, \qquad \pi_1(f, g) = -\frac{1}{2}\{f, g\}$$

である．以下では，π_l（$l \geqq 0$）はわかっているとして話をする．

$\tilde{D}: \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ を $\boldsymbol{W}_M$ 上の接ベクトル場とする．任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して，上と同様の分解で，

$$(3) \qquad \tilde{D}f^\# = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \nu^l D_l f \right)^\#, \qquad D_l f \in C^\infty(M)$$

とおくと，$\tilde{D}\nu = 0$，$\tilde{D}(f^\# * g^\#) = (\tilde{D}f^\#) * g^\# + f^\# * (\tilde{D}g^\#)$ だから，任意の自然数 l（$\geqq 0$）に対して

$$(4) \qquad \sum_{i+j=l} D_i \pi_j(f, g) = \sum_{i+j=l} \pi_j(D_i f, g) + \sum_{i+j=l} \pi_j(f, D_i g)$$

が成立しなければならない．特に $l = 0$ のとき

$$(5) \qquad D_0(fg) = (D_0 f)g + f(D_0 g)$$

であり，D_0 は $C^\infty(M)$ の微分となる．さらに

$$(6) \qquad \pi_l^-(f, g) = \frac{1}{2}(\pi_l(f, g) - \pi_l(g, f))$$

とおけば $[f^\#, g^\#] = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l \pi_l^-(f, g)^\#$，$\pi_0^- = 0$，$\pi_1^- = \pi_1$ であり，

$$(7) \qquad \tilde{D}\frac{1}{\nu}[f^\#, g^\#] = \frac{1}{\nu}[\tilde{D}f^\#, g^\#] + \frac{1}{\nu}[f^\#, \tilde{D}g^\#]$$

が成立するから，任意の自然数 l に対して，

$$(8)\qquad \sum_{i+j=l} D_i \pi_j^-(f,\ g) = \sum_{i+j=l} \pi_j^-(D_i f,\ g) + \sum_{i+j=l} \pi_j^-(f,\ D_i g)$$

が成立する．特に，

$$(9)\qquad D_0\{f,\ g\} = \{D_0 f,\ g\} + \{f,\ D_0 g\}$$

が成立する．つまり，D_0 はポアソン環 $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ の微分である．

ベクトル場に対しては普通は積分曲線を考えるのだが，$\boldsymbol{W}_M$上には「曲線」に相当するものがないので，第 I 部 3章 **6°** の補題1の考え方にしたがって，方程式

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}_t = \tilde{D}\tilde{f}_t, \qquad \tilde{f}_t \in \mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$$

を考える．$\tilde{f}_t = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l f_{l,t}{}^\#$，$f_{l,t} \in C^\infty(M)$ とすれば，(10) は次のような無限個の方程式系と同じである：

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial t} f_{l,t} = \sum_{i+j=l,\, i,j\geq 0} D_i f_{j,t} \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

D_0 は M 上のベクトル場であるが，これが完備であれば (11) は次のようにして順次解くことができる．まず $l=0$ のとき

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial t} f_{0,t} = D_0 f_{0,t}$$

を解かねばならないが，D_0 が完備だから，D_0 の積分曲線を使って，$\varphi_t : M \to M$ $(t \in \boldsymbol{R})$ なる C^∞ 同相写像が作れる．つまり，任意の $p \in M$ に対して $p_t = \varphi_t(p)$ は $p_0 = p$，$\dfrac{d}{dt} p_t = D_0(p_t)$ をみたす．(12) の解は，任意の $f_0 \in C^\infty(M)$ に対して $f_{0,t} = \varphi_t^* f_0$ で与えられる．$\varphi_t^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ の連続性は明らかであろう．

$f_{0,t}$，$f_{i,t}$，$\cdots$，$f_{l,t}$ が求まったとして $f_{l+1,t}$ に関する式は

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial t} f_{l+1,t} = D_0 f_{l+1,t} + \sum_{j=0}^{l} D_{l+1-j} f_{j,t}$$

であるが，右辺の第2項はすでに求めたものから計算できることに注意する．

天降りに解を与えてしまうが，(13) の解は，任意の $f_{l+1} \in C^\infty(M)$ に対して，

$$(14) \qquad f_{l+1,t} = \varphi_t^* f_{l+1} + \varphi_t^* \int_0^t \varphi_s^{-1*} \sum_{j=0}^{l} D_{l+1-j} f_{j,t}\, ds \qquad (\, t \in \boldsymbol{R}\,)$$

で与えられる．結局，解を具体的に書くときに難しいのは，φ_t を作る所であってその後は次々に積分を繰返すことで解けるのである．$\tilde{f}_t = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l f_{l,t}{}^\#$，$\tilde{f} = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l f_l^\#$ とおけば $\tilde{f}_t$ は (10) をみたし，$\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ である．

$f_0, f_1, \cdots, f_l, \cdots$ は任意であったから，$\tilde{f}$ としても結局任意の $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の元をとることができる．そこで，

$$(15) \qquad \tilde{f}_t = \Psi_t(\tilde{f}) \qquad (\, t \in \boldsymbol{R}\,)$$

とおいて，Ψ_t を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ から $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ への写像と考えてみると，(11) が線形の微分方程式だから，この写像が連続線形写像となることがわかる．しかも，$\tilde{D}$ が $\boldsymbol{W}_M$ 上の接ベクトル場なので，次のこともわかるのである．

定理 1 D_0 が M 上の完備ベクトル場であるという仮定の下で，
(a) $\Psi_t : \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は $\Psi_t(\nu) = \nu$ をみたす同形写像であり，かつ，(b) $\Psi_t \cdot \Psi_s = \Psi_{t+s}$ をみたす*)．

証明 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \cdot \varphi_s$ であることと，(14) から (b) は容易に確かめられる．さらに $\tilde{D}\nu = 0$ より，$\Psi_t(\nu) = \nu$ であることもわかる．さらに $\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi_t(\tilde{f}) = \tilde{D}\Psi_t(f)$ で $\tilde{D}$ は微分だから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\, \Psi_t(\tilde{f}) * \Psi_t(\tilde{g})\,) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(\tilde{f})\right) * \Psi_t(\tilde{g}) + \Psi_t(\tilde{f}) * \left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(\tilde{g})\right) \\
&= (\tilde{D}\Psi_t(\tilde{f})) * \Psi_t(\tilde{g}) + \Psi_t(\tilde{f}) * \tilde{D}\Psi_t(\tilde{g}) \\
&= \tilde{D}(\, \Psi_t(\tilde{f}) * \Psi_t(\tilde{g})\,)
\end{aligned}$$

であり，$\Psi_t(\tilde{f} * \tilde{g})$ と比べると，$\Psi_0(\tilde{f}) * \Psi_0(\tilde{g}) = \tilde{f} * \tilde{g} = \Psi_0(\tilde{f} * \tilde{g})$ だから，(13) の解の一意性により $\Psi_t(\tilde{f}) * \Psi_t(\tilde{g}) = \Psi_t(\tilde{f} * \tilde{g})$ がわかる．つまり，Ψ_t : $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は環としての準同形写像となるのである．$\Psi_0 = I$ (恒等写像)

---

*) この定理は逆も成立する．つまり (a)，(b) をみたす Ψ_t が求まるならば D_0 は完備でなければならない．

であり，$\Psi_{-t}\cdot\Psi_t = I$ であるから，Ψ_t は逆写像を持ち，したがって位相環としての同形写像であることがわかる．　□

定義　ν-束同形写像 $\boldsymbol{\Phi}$：$\boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ が次の性質を持つとき **準ワイル同相写像**[*] と呼ぶ：　$\boldsymbol{\Phi}$ が底空間 M に引起す同相写像を φ とし，$\boldsymbol{W}_M$ の切断 σ に対する引戻し $\boldsymbol{\Phi}^*\sigma$ を

$$(\boldsymbol{\Phi}^*\sigma)(p) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\sigma(\varphi(p))$$

で定義したとき，$\boldsymbol{\Phi}^*\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ が成立する．

実は前定理の Ψ_t はある準ワイル同相写像 $\boldsymbol{\Phi}_t$ を使って，$\Psi_t = \boldsymbol{\Phi}_t{}^*$ となることを以下で証明しよう．

1° 定理1により，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の極大両側閉イデアルは M の点に対応し，$\mathcal{I}_p = \{f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)\,;\, f(p) \in \boldsymbol{W}_{(1),p}\}$ の形で与えられる．Ψ_t：$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は位相環としての同形写像だから，各 p につき $\Psi_t \mathcal{I}_p = \mathcal{I}_{\psi_t(p)}$ と置くことにより，全単射 ψ_t：$M \to M$ が作れるが，$\psi_t{}^{-1}$ は最初に (12) 式の D_0 から作った φ_t と同じとなることが容易にわかる．

$\mathcal{I}_p{}^k$ を $\mathcal{I}_p$ の元を k 個かけたものの1次結合の全体とし，$\mathcal{I}_p{}^\infty = \bigcap_k \mathcal{I}_p{}^k$ とすれば，$\Psi_t \mathcal{I}_p{}^\infty = \mathcal{I}_{\varphi_t{}^{-1}(p)}{}^\infty$ となる．一方，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\mathcal{I}_p{}^\infty$ は自然に $\boldsymbol{W}_M$ の p におけるファイバー $\boldsymbol{W}_p$ と同一視できるから Ψ_t は $\boldsymbol{W}_p$ から $\boldsymbol{W}_{\varphi_t{}^{-1}(p)}$ への同形写像を引起す．これの逆写像を $\boldsymbol{\Phi}_t$：$\boldsymbol{W}_{\varphi_t{}^{-1}(p)} \to \boldsymbol{W}_p$ と書き，p を M 全体にわたって動かして考えれば，$\boldsymbol{\Phi}_t$ は $\boldsymbol{W}_M$ から $\boldsymbol{W}_M$ への束同形写像で，$\boldsymbol{\Phi}_t \boldsymbol{W}_q = \boldsymbol{W}_{\varphi_t(q)}$ となることがわかる．

$f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ に対して，$f + \mathcal{I}_p{}^\infty$ を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)/\mathcal{I}_p{}^\infty = \boldsymbol{W}_p$ の元と見れば，$f + \mathcal{I}_p{}^\infty = f(p)$ と考えて良いから，

$$(\boldsymbol{\Phi}_t{}^* f)(p) = \boldsymbol{\Phi}_t{}^{-1} f(\varphi_t(p))$$

---

*）　準ワイル同相はワイル同相より少し弱い性質で，必ずしも $\boldsymbol{\Phi}^* f^\# = (\varphi^* f)^\#$ mod ν^2 は成立しない．

$$= \Psi_t(f + \mathscr{I}_{\varphi_t(p)}) = \Psi_t(f) + \mathscr{I}_p = \Psi_t(f)(p)$$

より，$\boldsymbol{\Phi}_t{}^* = \Psi_t$ であることがわかる．したがって $\boldsymbol{\Phi}_t{}^*\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M) = \mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ であり，$\boldsymbol{\Phi}_t{}^*\nu = \Psi_t\nu = \nu$ であるから，$\boldsymbol{\Phi}_t$： $\boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ は準ワイル同相写像であることがわかる．以上をまとめて，

定理 2 $\boldsymbol{W}_M$ のベクトル場 $\widetilde{D}$ において，D_0 が M 上の完備ベクトル場ならば，$\boldsymbol{W}_M$ の準ワイル同相写像の 1 径数の族 $\{\boldsymbol{\Phi}_t\}_{t\in \boldsymbol{R}}$ が存在し，それは次の性質を持つ：

（a） $\boldsymbol{\Phi}_s\cdot\boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{\Phi}_{s+t}$ （$s, t \in \boldsymbol{R}$），　　$\boldsymbol{\Phi}_0 = 1$ （恒等写像）

（b） $\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Phi}_t{}^*(f) = \widetilde{D}\boldsymbol{\Phi}_t{}^*(f)$

ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上ではベクトル場 $\widetilde{D}$ の「積分曲線」というものは考えられないが，上の定理がその代りをするのである．

3° 擬微分作用素

前節のベクトル場を，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ 上で考えてみよう．

(A) 任意の $\hat{H} \in \mathscr{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})$ に対し，$\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\hat{H})$ は $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ 上のベクトル場であったから，まずこれがどのようなものか考察しよう．話を簡単にするため，以下では多様体 N はコンパクトと仮定する．さらに，

（1） $\hat{H} = (H_0 + \nu H_1 + \cdots + \nu^l H_l + \cdots)^{\#}$，　　$H_l \in C^\infty(T^*N)$

とする．前節の D_0 にあたる T^*N 上のベクトル場は $\{H_0, \ \}$ で与えられる．N の局所座標系を $(x^1, \cdots, x^n)$，これが定義されている開集合を U，T^*N から N への射影を π とすると，$\pi^{-1}(U)$ の元は $\sum_{i=1}^{n} p_i\,dx^i$ と書け（$x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n$）が $\pi^{-1}(U)$ 上の局所標準座標系となる．この局所標準座標系で

H_0 を表示しておけば

$$(2) \qquad \{H_0,\ \} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H_0}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H_0}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \qquad (= \mathrm{ad}(H_0))$$

と書ける. $\{H_0,\ \}$ の完備性について述べるために少し微分幾何的用語を用意しよう: まず N 上に C^∞ 級のリーマン計量 $g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_{\boldsymbol{x}}$ を1つ固定する. (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と書けば, $\langle dx^i, dx^j \rangle_{\boldsymbol{x}} = g^{ij}(\boldsymbol{x})$ と定義することにより, T^*N の各ファイバー $T_{\boldsymbol{x}}^*N$ に内積が定義される. この内積に関するノルムを $\|\omega\|_{\boldsymbol{x}}$ とし, $D_{\boldsymbol{x}}^*$ を $T_{\boldsymbol{x}}^*N$ 内の単位開球体 $\{\omega \in T_{\boldsymbol{x}}^*N;\ \|\omega\|_{\boldsymbol{x}} < 1\}$ とする. $\bar{D}_{\boldsymbol{x}}^* = \{\omega \in T_{\boldsymbol{x}}^*N;\ \|\omega\|_{\boldsymbol{x}} \leqq 1\}$, $S_{\boldsymbol{x}}^* = \{\omega \in T_{\boldsymbol{x}}^*N;\ \|\omega\|_{\boldsymbol{x}} = 1\}$ とし, さらに, $D^*_N = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in N} D_{\boldsymbol{x}}^*$, $S^*_N = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in N} S_{\boldsymbol{x}}^*$ とする. 写像 φ: $D^*_N \to T^*N$ を

$$(3) \qquad \varphi(x\ ;\ \omega) = \left(\boldsymbol{x}\ ;\ \left(\tan\frac{\pi}{2}\|\omega\|_x\right)\frac{\omega}{\|\omega\|_x}\right)$$

で定義 ($\omega = 0$ の所では極限値を使う) すれば, φ は C^∞ 同相である. この φ によって T^*N を D^*_N と同一視して考えれば, S^*_N は T^*N の無限遠方に貼りついている多様体であると理解できる. N をコンパクトと仮定したので, $\bar{D}^*_N$, S^*_N もコンパクトである. D^*_N を **単位開球体バンドル**, S^*_N を **単位球バンドル** と呼ぶ. これらの用語を用いて $\{H_0,\ \}$ の完備性を考えてみよう.

定理1 次の (a), (b) の場合には $\{H_0,\ \}$ は完備である:

(a) 任意の $c \in \boldsymbol{R}$ に対して, $H_0^{-1}(c)$ が T^*N のコンパクト部分集合となる場合.

(b) φ の逆写像を用いて, D^*_N 上にベクトル場 $X_0 = d\varphi^{-1}(\mathrm{ad}\, H_0))$ を作ったとき, X_0 が $\bar{D}^*_N$ まで拡張して定義でき, 拡張されたベクトル場が S^*_N 上では S^*_N に接している場合.

証明 (a) $\mathrm{ad}(H_0)H_0 = 0$ だから $\mathrm{ad}(H_0)$ の積分曲線に沿って H_0 は一定である. つまり $H_0^{-1}(c)$ 内の点から出発する積分曲線は $H_0^{-1}(c)$ 内にある. $H_0^{-1}(c)$ は

コンパクト集合だから第 I 部 2 章 **2°** で使ったのと同じ論法で $\mathrm{ad}(H_0)$ の完備性がわかる.

(b) についても $\bar{D}^*{}_N$ のコンパクト性より完備性がわかる. □

例 (a) N 上でニュートン力学を考えると，ハミルトン関数は，

$$H_0(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{P})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}\|_x{}^2+V(\boldsymbol{x}), \qquad V\in C^\infty(N)$$

の形である. V はコンパクト多様体 N 上の連続関数だから有界であり，これより (a) の条件がみたされる. しかしこの H_0 は (b) の条件はみたさない.

(b) T^*N の点 $(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{p})$ は，$(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{x}\,;r\omega)$，$r=\|\boldsymbol{p}\|_x$，$\omega=\dfrac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|_x}\in S_x{}^*N$，と書ける. この書き方で，十分大きな r の所で

(4) $H(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{p})\sim a_1(\boldsymbol{x}\,;\omega)r+a_0(\boldsymbol{x}\,;\omega)+\cdots+a_{-j}(\boldsymbol{x}\,;\omega)r^{-j}+\cdots$

の形に，$C^\infty(S^*{}_N)$ の元 $a_1, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-j}, \cdots$ を用いて漸近展開できるような T^*N 上の C^∞ 関数の全体を $\sum^1(T^*N)$ とする.

$\sum^1(T^*N)$ の任意の元 H は，実は (b) の条件をみたし，したがって $\mathrm{ad}(H)$ は完備となる*). (4) 式の意味は，各 j で

$$\lim_{r\to\infty} r^j(H-a_1r-a_0-\cdots-a_{-j}r^{-j})=0 \qquad (\text{一様収束})$$

となるということである.

(**B**) 局所座標系を用いて計算してみれば，$\{\sum^1(T^*N), \sum^1(T^*N)\}\subset\sum^1(T^*N)$ であることは容易にわかるが，$\sum^1(T^*N)$ は通常の積に関しては閉じていない. 一般に，$\sum^m(T^*N)$を

(5) $$H(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{p})\sim a_m r^m+a_{m-1}r^{m-1}+\cdots+a_{-j}r^{-j}+\cdots,$$
$$a_l\in C^\infty(S^*N)$$

の形に漸近展開できる T^*N 上の C^∞ 関数の全体とすると，

(6) $$\textstyle\sum^m(T^*N)\supset\sum^{m-1}(T^*N)\supset\cdots\supset\sum^{-j}(T^*N)\supset\cdots$$

---

*) 証明は Omori et al, On regular Fréchet-Lie groups IV, Tokyo. J. Math. vol 6, 1983 参照.

(7)　$\sum^{k}(T^*N)\cdot\sum^{l}(T^*N)\subset\sum^{k+l}(T^*N)$

(8)　$\{\sum^{k}(T^*N),\ \sum^{l}(T^*N)\}\subset\sum^{k+l-1}(T^*N)$

が成立する．したがって，$\sum^{(\infty)}(T^*N)=\bigcup_{k\geqq 0}\sum^{k}(T^*N)$ とすると，これは，$C^\infty(T^*N)$ のポアソン部分環となる．

ν を形式的なパラメーターとし，$C_\nu{}^\infty(M)$ の場合と同様に，

$$\sum\nolimits_{\nu}^{(\infty)}(T^*N)=\prod_{l=0}^{\infty}\nu^l\sum\nolimits^{(\infty)}(T^*N)\qquad(\text{直積})$$

を考える．そして，これまでと同様に $\sum_{\nu}^{(\infty)}(T^*N)$ に非可換な積 $*$ を導入することを考えるのだが，今度は抽象的にそれを行わずに，$H\in\sum_{\nu}^{(\infty)}(T^*N)$ に対して擬微分作用素と呼ばれる $C_C{}^\infty(N)$ に働く作用素 $P_h(H)$ を定義し，これの作用素としての代数から $*$-積を定義してみたいと思う．

(C)　上の目的のためにもう少し微分幾何的用語を用意しよう．**(A)** で N 上にリーマン計量を固定したのだが，それを用いて測地線なるものが定義できる．測地線の方程式は

(9)　$$\frac{d^2}{dt^2}x^i(t)+\sum_{j,k}\left\{\begin{matrix}i\\ j\,k\end{matrix}\right\}\frac{d}{dt}x^j(t)\frac{d}{dt}x^k(t)=0\qquad(1\leqq i\leqq n)$$

であるが，この方程式の，初期値 $\boldsymbol{x}$，初期微分 X ($\in T_{\boldsymbol{x}}N$) の解 (つまり測地線) を $\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}(t,\ X)$ と書くと，(9) の形と解の一意性から容易に

(10)　$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{t}{a},\ aX\right)=\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}(t,\ X)\qquad(a\neq 0)$$

であることがわかる．つまり，$\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}(t,\ X)$ は tX にしか依存しない．そこで，$\mathscr{E}_{\boldsymbol{x}}(t,\ X)=\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}\,tX$ と書くことにし，$t=1$ として，$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}$ を $T_{\boldsymbol{x}}N$ から N への写像と考える．常微分方程式の解の正則性より，$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}:\ T_{\boldsymbol{x}}N\to N$ は C^∞ 級写像である．$\mathrm{Exp}:\ TN\to N\times N$ を $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x}\,;X)=(\boldsymbol{x},\ \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}X)$ で定義し，これを**指数写像** (exponential mapping) と呼ぶ．$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}:\ T_{\boldsymbol{x}}N\to N$ の $0\in T_{\boldsymbol{x}}N$ における微分 $(D\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}})_0$ は，定義を使うと

$$(D\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}})_0 X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}\, tX = X$$

となり，恒等写像となる．逆写像定理により，$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}$ は $T_{\boldsymbol{x}}N$ の 0 の近傍 $V_{\boldsymbol{x}}$ から N における $\boldsymbol{x}$ の近傍 $U_{\boldsymbol{x}}$ の上への C^∞ 同相写像となる．$\boldsymbol{x}$ を動かして $V_N = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in N} V_{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{U}_\Delta = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in N} (\boldsymbol{x}, U_{\boldsymbol{x}})$ を考えれば，V_N は TN の切断 0 の近傍であり，$\tilde{U}_\Delta$ は $N\times N$ の対角線集合 $\Delta = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x}\in N\}$ の近傍であるとして良く，Exp は V_N から $\tilde{U}_\Delta$ の上への C^∞ 同相写像となる．$V_{\boldsymbol{x}}$ としては具体的に $T_{\boldsymbol{x}}N$ の 0 の ε-近傍 $\{X\in T_{\boldsymbol{x}}N\,;\, \|X\|_{\boldsymbol{x}} < \varepsilon\}$ としておいて良いのだが，$\varepsilon\,(>0)$ をどの位まで大きくとれるかは N 上のリーマン計量のとり方に依存する．

(D) 前項の指数写像を使って，ワイル型の **擬微分作用素** と呼ばれているものを N 上で定義しよう．

まず，TN 上の C^∞ 関数 $\phi(\boldsymbol{x}\,;\,X)$ で次のような性質を持つものを任意に 1 つとって固定する：

(a) $\mathrm{supp}\,\phi \subset V_N$ （V_N は (**C**) における 0 切断の近傍）

(b) V_N よりもっと小さい 0 切断の近傍上で $\phi\equiv 1$.

$\sum_{\boldsymbol{C}}^m(T^*N) = \boldsymbol{C}\otimes\sum^m(T^*N)$ とし，$H\in\sum_{\boldsymbol{C}}^m(T^*N)$ に対して，$P_h(H): C_C{}^\infty(N)\to C_C{}^\infty(N)$ なる線形作用素を次式で定義する．

$$(P_h(H)\varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{T_{\boldsymbol{x}}^*N}\int_{T_{\boldsymbol{x}}N} H\left(\widehat{\mathrm{Exp}}_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{X}{2}, \xi\right)\right) e^{\frac{i}{h}\langle\xi, X\rangle_{\boldsymbol{x}}}\phi(\boldsymbol{x}\,;\,X)\varphi(\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}} X)\, dX\, d\xi \tag{11}$$

上の定義式はかなり面倒なものだから，まず定義式をこの節で解説しよう．まず dX, $d\xi$ は $T_{\boldsymbol{x}}N$, $T_{\boldsymbol{x}}{}^*N$ 上での (g_{ij}), (g^{ij}) に関する体積要素である．$\langle\xi, X\rangle_{\boldsymbol{x}}$ は $T_{\boldsymbol{x}}{}^*N$ の元と $T_{\boldsymbol{x}}N$ の元の間に自然に定義される内積で，$\xi(X)$ と書いても良いものである．i は虚数単位，h はプランク定数と呼ばれる（微小な）定数である．$\phi(\boldsymbol{x}\,;\,X)\varphi(\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}} X)$ は $T_{\boldsymbol{x}}N$ 上の C^∞ 関数であ

るが台（support）は ϕ があるのでコンパクトとなっている．

Exp_x は V_x から U_x の上への C^∞ 同相写像だから，任意の $Y \in V_x$ に対して，$(D\mathrm{Exp}_x)_Y$ は $T_x N$（$T_Y T_x N$ と同一視してある）から $T_{\mathrm{Exp}_x Y} N$ の上への線形同形写像で，これの相対写像 $(D\mathrm{Exp}_x)_Y{}^*$ は $T^*{}_{\mathrm{Exp}_x Y} N$ から $T_x{}^*N$ の上への線形同形写像になっている．これを利用して，$V_x \times T_x{}^*N$ から $\pi^{-1}(V_x)$（$\subset T^*N$）の上への C^∞ 同相写像 $\widetilde{\mathrm{Exp}}_x$ を

$$\widetilde{\mathrm{Exp}}_x(Y, \xi) = (D\mathrm{Exp}_x)^{-1}{}_Y{}^*\xi \qquad (\in T^*{}_{\mathrm{Exp}_Y}N) \tag{12}$$

によって定義する．$H \in \Sigma_C^m(T^*N)$ に対して $H(\widetilde{\mathrm{Exp}}_x(Y, \xi))$ は $V_x \times T_x{}^*N$ 上の C^∞ 関数になっているわけである．

$$f(x\,;\,X, \xi) = H\left(\widetilde{\mathrm{Exp}}_x\left(\frac{X}{2}, \xi\right)\right)\phi(x\,;\,X)\varphi(\mathrm{Exp}_x X) \tag{13}$$

とおけば f は X に関してはコンパクトな台を持ち ξ に関しては多項式程度の増大度を持つ $T_x N \times T_x{}^*N$ 上の関数となり，f を X に関してフーリエ変換した $\tilde{f}$，つまり，

$$\tilde{f}(x\,;\,\xi, \xi) = \int_{T_x N} e^{\frac{i}{h}<\xi, X>_x} f(x\,;\,X, \xi)\,dX$$

は ξ に関して急減少関数となる．したがって，(11) 式の積分はこの順番で積分する限りでは意味を持つ．

$\dfrac{1}{h}\xi = \xi'$ とおくと，$d\xi = h^n d\xi'$ だから (11) は次のように書いても良い：

$$\begin{aligned}&(P_h(H)\varphi)(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T_x{}^*N}\int_{T_x N} H\left(\widetilde{\mathrm{Exp}}_x\left(\frac{X}{2}, h\xi'\right)\right)e^{i<\xi', X>_x}\phi(x\,;\,X)\varphi(\mathrm{Exp}_x X)\,dX\,d\xi'\end{aligned} \tag{14}$$

(11)，(14) 式が x に関して C^∞ 級であることは定義式の中に x がパラメーターとしてしか入っていないことから明らかであろう．また，(14) 式は被積分関数が $dX\,d\xi'$ に関しては可積分ではないから積分順序を勝手に変更できない．これは計算上，極めて不便だから，次のように書きかえておくと良い．$\Psi(x\,;\,\xi')$ を T^*N 上の C^∞ 級関数で，台がコンパクトで，0 切断の近傍

上で 1 となるものとし，$\psi_\delta(\boldsymbol{x};\xi')=\psi(\boldsymbol{x};\delta\xi')$ とする．これを使うと，

$$P_h(H)\varphi=\lim_{\delta\to 0}P_h(\psi_\delta H)\varphi \tag{15}$$

であることがわかるから，必要に応じて (15) を使う．

4° 積公式，シュレーディンガー方程式，ワイル代数

$H\in\sum_C^m(T^*N)$ のとき，前節で定義した $P_h(H)$: $C^\infty(N)\to C^\infty(N)$ は m 階の **ワイル型擬微分作用素** と呼ばれていて，次のことが知られている：

定理 1 （a） $P_h(H)=0 \iff H=0$

（b） $H\in\sum_C^m(T^*N)$，$H'\in\sum_C^{m'}(T^*N)$ のとき，$P_h(H)P_h(H')$ に対して，$H''\in\sum_C^{m+m'}(T^*N)$ が存在して，$P_h(H)P_h(H')-P_h(H'')$ は $N\times N$ 上の C^∞ 関数を積分核とする作用素(smoothing operator)となる．

（c） (b) で定まる H'' は h/i に関して次の形に漸近展開される：

$$H''(\boldsymbol{x};\xi)\sim H\cdot H'-\frac{h}{i}\frac{1}{2}\{H,H'\}+\cdots+\left(\frac{h}{i}\right)^l c_l(H,H')+\cdots$$

（d） $c_l(H,H')$ ($l\geqq 1$) (ただし，$c_1(H,H')=-\frac{1}{2}\{H,H'\}$) は $\sum^{m+m'-l}(T^*N)$ の元であり，H, H' に関しては双線形の微分作用素である．

上の定理の証明はかなり長い計算を要するので省略する．$c_l(H,H')$ の具体的な形は複雑すぎて書き切ることはできない．どのような計算をすれば良いのかについては，拙著，「無限次元リー群論」(紀伊國屋数学叢書 15) 第 6 章 §6，第 11 章 §5 等を参照してもらいたい．

ともあれ，上の定理により，smoothing operator を $-\infty$ 階の擬微分作用素と呼んでしまえば，擬微分作用素全体は結合律をみたす代数となる．積の公式 (c) を見れば，これはポアソン環 ($\sum_C^{(\infty)}(T^*N)$, { , }) の変形(deformation) と考えて良いから，前節までの考え方で，「ベクトル場」なるもの

をこの非可換代数の上で考えることができる．特に，$H_0 \in \sum^{(m)}(T^*N)$ のとき，$\frac{i}{h}\tilde{\mathrm{ad}}(H_0) = \frac{i}{h}[H_0, \quad]$（ただし $[H_0, \tilde{f}] = H_0 * \tilde{f} - \tilde{f} * H_0$）はベクトル場だから，これの積分曲線を求めることに対応する式は，**2°** の (10) と同様に，

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}_t = \frac{i}{h}\tilde{\mathrm{ad}}(H_0)\tilde{f}_t, \qquad f_t \in \textstyle\sum_C^{(\infty)}(T^*N)$$

となる．(1) 式は作用素のまま書けば，

$$(1') \qquad \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}P_h(\tilde{f}_t) = [P_h(H_0), P_h(\tilde{f}_t)]$$

と書いても良い．特に $\mathrm{ad}(H_0) = \{H_0, \quad\}$ が完備ベクトル場となる場合には (1) は **2°** で述べたようなやり方で解くことができる．ただし，この場合には $\nu = -ih$ として，ν に関して展開したものしか求められない．逆に，(1) が任意の初期関数 $f \in \sum_C^{(\infty)}(T^*N)$ に対して $-\infty < t < \infty$ の範囲で解を持つならば，$\mathrm{ad}(H_0)$ は T^*N 上の完備ベクトル場となる．

ところで，$\frac{i}{h}P_h(H_0)$ は $C_C^\infty(N)$ に働く線形作用素だから，次のような方程式を考えることができる：

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = \frac{i}{h}P_h(H_0)\varphi_t, \qquad \varphi_t \in C_C^\infty(N)$$

(2) は **シュレーディンガー方程式** と呼ばれていて，関数解析的な取扱いが色々工夫されている．(2) はいつでも解けるというわけではないが，しばらく，解が存在するものとして話を進めよう．$\Phi_t(\varphi)$ を，初期関数が $\varphi \in C_C^\infty(N)$ であるような (2) の解とし，$\Phi_t(\varphi) \in C_C^\infty(N)$（$\forall t \in \boldsymbol{R}$）と仮定しよう．(2) は線形だから，$\Phi_t$ は $C_C^\infty(N)$ から $C_C^\infty(N)$ への線形作用素となり，解の一意性から，$\Phi_s \cdot \Phi_t = \Phi_{s+t}$ も得られる．したがって，Φ_t は $C_C^\infty(N)$ から $C_C^\infty(N)$ の上への線形同形写像として良い．Φ_t は (2) の **基本解** と呼ばれ，雰囲気を出すためにしばしば

$$e^{t\frac{i}{h}P_h(H_0)} \quad \text{とか} \quad \exp t\frac{i}{h}P_h(H_0)$$

と書かれる．

上のような基本解があるものとし，任意の $\tilde{f} \in \Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ に対して，$C_C^\infty(N)$ 上の作用素

$$(3) \qquad e^{t\frac{i}{h}P_h(H_0)}P_h(\tilde{f})e^{-t\frac{i}{h}P_h(H_0)}$$

を考え，これを t で微分してみれば，(3) は (1′) の解であることが容易にわかる．したがって，次のような，関数解析的定理が得られる：

定理 2　$H_0 \in \Sigma^m(T^*N)$ に対し，シュレーディンガー方程式の基本解 $e^{t\frac{i}{h}P_h(H_0)}$ が作れ，それが，次の性質 (P) を持つとする：

$$(\mathrm{P}) \quad e^{t\frac{i}{h}P_h(H_0)}P_h(\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N))e^{-t\frac{i}{h}P_h(H_0)} \subset P_h(\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N))$$

ただし，$P_h(\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)) = \{P_h(\tilde{f})\,;\ \tilde{f} \in \Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)\}$．

このとき，$\mathrm{ad}(H_0)$ は T^*N 上の完備ベクトル場でなければならない．

証明　基本解の存在と (P) の仮定から (1′) を経由して (1) の解が任意の初期関数 $\tilde{f} \in \Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ に対して作れるので，$\mathrm{ad}(H_0) = \{H_0,\ \}$ は完備である． □

$H_0 \in \Sigma^1(T^*N)$ の場合には $\mathrm{ad}(H_0)$ は完備ベクトル場であった．証明は省略するが，これについては次のことが解っている．

定理 3　任意の $H_0 \in \Sigma^1(T^*N)$ に対し，シュレーディンガー方程式の基本解 $e^{t\frac{i}{h}P_h(H_0)}$ が作れ，それは性質 (P) を持つ*)．

ところで，定理 1 の (c)，(d) によれば擬微分作用素の積 $H*H'$ は $\dfrac{h}{i}$ に関して漸近展開できる．そこで $\nu = \dfrac{h}{i}$ とおき，これをパラメーターと思うことにし漸近級数の方にのみ注目する．つまり，$H,\ H' \in \Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ に対して，積 $*$ を

*）　H. Omori et al, On regular Fréchet-Lie groups, VI, Tokyo J. Math. vol 6, 1983 参照．

$$(4)\quad \begin{aligned} &H * H' = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l c_l(H, H'),\\ &c_0(H, H') = H \cdot H', \quad c_1(H, H') = -\frac{1}{2}\{H, H'\} \end{aligned}$$

と定義し直す．ただし，$c_l(H, H')$ は定理 1，(c) のものを使う．そしてこの積を $\Sigma_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ の複素化 $\Sigma_{C,\nu}^{(\infty)}(T^*N) = \boldsymbol{C} \otimes \Sigma_\nu^{(\infty)}(T*N)$ 上に自然に拡張しておく．

T^*N の点 p を任意に固定し，$H * H'$ の p でのテイラー展開を考えて見よう．$c_l(H, H')$ は双線形微分作用素であったから，これは，H, H' の p でのテイラー展開を知れば計算できる．つまり，$(\Sigma_{C,\nu}^{(\infty)}(T^*N), *)$ は1章 **3°** の局所決定性の仮定をみたしているのである．したがって，点 p における無限小部分としての代数が考えられる．これは次のように定義される：

p を原点とする T^*N の局所座標系を $(z_1, z_2, \cdots, z_{2n})$ とし，τ_p を p におけるテイラー展開とする．任意の単項式 $\boldsymbol{z}^\alpha$, $\boldsymbol{z}^\beta$ に対して，積 $\boldsymbol{z}^\alpha * \boldsymbol{z}^\beta$ を，

$$(5)\qquad \boldsymbol{z}^\alpha * \boldsymbol{z}^\beta = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l \tau_p c_l(\boldsymbol{z}^\alpha, \boldsymbol{z}^\beta)$$

によって定義する．これによって $2n$ 変数の $\boldsymbol{C}$ 係数の形式的ベキ級数環 $\Phi_C^{(2n)}$ を形式的に拡大した $\Phi_{C,\nu}^{(2n)} = \prod_{l=0}^{\infty} \nu^l \Phi_C^{(2n)}$（直積）の上に積 $*$ が自然に定義される．$\Phi_C^{(2n)}$ は普通の積・と，ポアソン積{ , }によって，階数が $2n$ のポアソン環になっているが，$(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, *)$ は $(\Phi_C^{(2n)}, \cdot)$ の変形になっており，{ , } は $*$-積の ν^1 の項に表れるものになっていることが容易にわかる．

すると，今度は $(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, *)$ がどんな代数かということが問題になるが，実はこれは複素化されたワイル代数 $\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{W}_{2n}$ と同形である．これは次のような一般的定理によって証明される：

定理 4　$\Phi_{C,\nu}^{(2n)}$ 上に結合律をみたす積 $*$ が定義され，ν はすべての元と可換であり，さらに $f, g \in \Phi_C^{(2n)}$ に対して

$$f * g = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l \pi_l(f, g)$$

と書いたとき，$\pi_0(f, g)=fg$，$\pi_1(f, g)=-\dfrac{1}{2}\{f, g\}$ であり，$\{\ ,\ \}$ は階数 $2n$ のポアソン括弧積であるとする．このとき，$(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, *)$ は複素化されたワイル代数 $\boldsymbol{C}\otimes \boldsymbol{W}_{2n}$ と同形である*)．

証明 定理は $\boldsymbol{C}$ 係数で述べてあるが，以下の証明を見れば同じ定理が $\boldsymbol{R}$ 係数の場合にも成立するので，そのことを先ず注意しておこう．

$\{\ ,\ \}$ の階数が $2n$ であるから，$\Phi_C^{(2n)}$ の元 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ をうまく選ぶと，

(6) $$\{x_i, x_j\}=\{y_i, y_j\}=0, \qquad \{x_i, y_j\}=\delta_{ij} \qquad (1\leqq i, j\leqq n)$$

が成立するようにできる．$(z_1, \cdots, z_{2n})=(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ とおけば，仮定より，$1\leqq i, j\leqq n$ に対して

(7) $$\begin{aligned}[z_i, z_j]&=\nu^2 a_{ij}^{(2)}+\nu^3 a_{ij}^{(3)}+\cdots\\ [z_{n+i}, z_{n+j}]&=\nu^2 a_{n+i,n+j}^{(2)}+\nu^3 a_{n+i,n+j}^{(3)}+\cdots \qquad a_{\alpha\beta}^{(l)}\in\Phi_C^{(2n)}\\ [z_i, z_{n+j}]&=\nu\delta_{ij}+\nu^2 a_{i,n+j}^{(2)}+\nu^3 a_{i,n+j}^{(3)}+\cdots\end{aligned}$$

とおいて良い．ヤコビ恒等式 $[f, [g, h]]+[g, [h, f]]+[h, [f, g]]=0$ より，容易に，$1\leqq\alpha, \beta, \gamma\leqq 2n$ に対して

(8) $$\{z_\alpha, a_{\beta\gamma}^{(2)}\}+\{z_\beta, a_{\gamma\alpha}^{(2)}\}+\{z_\gamma, a_{\beta\alpha}^{(2)}\}=0$$

であることがわかる．$\{x_i, f\}=\dfrac{\partial}{\partial y_i}f$，$\{y_i, f\}=-\dfrac{\partial}{\partial x_i}f$ を考慮して，2 次微分形式 ω を

$$\omega=\sum_{i,j}\left\{a_{n+i,n+j}^{(2)}dx_i\wedge dx_j-2a_{n+i,j}^{(2)}dx_i\wedge dy_j+a_{ij}^{(2)}dy_i\wedge dy_j\right\}$$

と定義すると，(8) は $d\omega=0$ と同値となる．したがって，ポアンカレの補題により，1 次微分形式

$$\theta=\sum_{\alpha=1}^{2n}b_\alpha dz_\alpha, \qquad b_\alpha\in\Phi_C^{(2n)}$$

を使って，$\omega=d\theta$ と書くことができる．そこで

(9) $$\tilde{x}_i=x_i+\nu b_{n+i}, \qquad \tilde{y}_i=y_i-\nu b_i \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

とおき，$(\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_{2n})=(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)$ とおいて (7) に相当する $[\tilde{z}_\alpha, \tilde{z}_\beta]$ を計算してみれば，ν^2 の項が消えて，その分 ν^3 の項が少し変化していることがわか

---

*) 1 章 **7**° の定理の証明法参照．

る．そこで ν^3 の項に対して，(8) と同様の式を作り，上と同じ操作をすると，ν^3 の項も消してしまうことができる．以下この操作を繰返してやることにより，結局

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha + \nu b_\alpha^{(1)} + \nu^2 b_\alpha^{(2)} + \cdots \qquad b_\alpha^{(l)} \in \Phi_C^{(2n)},\ 1 \leqq \alpha \leqq 2n$$

の形の元で

(10)　$[\tilde{z}_i, \tilde{z}_j] = [\tilde{z}_{n+i}, \tilde{z}_{n+j}] = 0, \qquad [\tilde{z}_i, \tilde{z}_{n+j}] = -\nu\delta_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$

をみたすものを $(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, *)$ の中に作ることができる．

上の関係式 (10) はワイル代数の基本関係式だから，これで証明ができているようなものだが，もう少し詳しく述べると次のようになる．

$(\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_{2n})$ は $[[\tilde{z}_\alpha, \tilde{z}_\beta], \Phi_{C,\nu}^{(2n)}] = \{0\}$ をみたすから，1章 **4°** と全く同様にして $\odot$-積を作ることができる．$(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, \odot)$ と，$C[\![\nu, \tilde{z}]\!]$ が同形なのは明らかであろう．すると，$(\Phi_{C,\nu}^{(2n)}, *)$ は，$C[\![\nu, \tilde{z}]\!]$ に，1章 **4°** の定理にある積公式を使って積を定義したものと同形になる．これはワイル代数に他ならない．　□

上の定理より，T^*N 上にワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{T^*N}$ が作られ *)，複素化したワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N})^C$ $(= \boldsymbol{C} \otimes \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{T^*N}))$ は $(\sum_{C,\nu}^{(\infty)}(T^*N), *)$ を部分環として含んでいることがわかる．

5°　擬微分作用素の共役作用素

前節までと同様 N をコンパクト多様体とし，T^*N 上の擬微分作用素環 $P_h(\sum_C^{(\infty)}(T^*N))$ を考える．各 $P_h(H)$ は $C_C^\infty(N)$ 上の線形作用素であったわけだが，この節ではまずこの作用素をもう少し詳しく見てみよう．

まず，N の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，各 V_λ が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U_λ と C^∞ 同相になるものをとり，これを固定する．$\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する1の分解とする．V_λ 上で与えられたものはすべて上の C^∞ 同相で U_λ 上に移して考えるの

---

*)　1章 **7°** の定理参照．後の方の2章 **7°** の定理1も参照．

で，以下では V_λ と U_λ とを同一視してしまい，同じ記号で書くことにする．

任意の $f \in C_C^\infty(N)$ に対し，ノルム $\|f\|_k$ （ $k=0, 1, 2, \cdots$ ） を

$$\|f\|_k{}^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{|\alpha| \leqq k} \int_{U_\lambda} |\ \partial_x^\alpha(\phi_\lambda f)\ |^2 dx, \qquad dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

で定義する．N がコンパクトだから Λ は有限集合として良く，したがって，$\|f\|_k < \infty$ となる．定義から容易に

$$\|f\|_0 \leqq \|f\|_1 \leqq \cdots \leqq \|f\|_k \leqq \cdots$$

がわかる．ノルム $\|\ \ \|_k$ によって $C_C^\infty(N)$ を位相ベクトル空間と考え，これを完備化した（つまり，コーシー列をつけ加えた）ものを $L_2{}^k(N)$ と書く．$L_2{}^k(N)$ はヒルベルト空間であり

$$L_2{}^0(N) \supset L_2{}^1(N) \supset \cdots \supset L_2{}^k(N) \supset \cdots$$

となっている．N 上に C^∞ の体積要素を 1 つ固定し，それに関して 2 乗可積分な関数の全体を $L_2(N)$ とすると，$L_2{}^0(N)$ と $L_2(N)$ とは位相線形空間として同形である．またソボレフの補題により，

$$\bigcap_k L_2{}^k(N) = C_C^\infty(N)$$

であることが知られている．

$L_2{}^k(N)$ の共役空間を $L_2{}^{-k}(N)$ と書き，$L_2{}^0(N)$ と $L_2{}^{-0}(N)$ とをリースの定理により同一視しておくと，ヒルベルト空間の列

$$\cdots \supset L_2{}^{-k}(N) \supset \cdots \supset L_2{}^0(N) \supset L_2{}^1(N) \supset \cdots \supset L_2{}^k(N) \supset \cdots$$
$$(\supset C_C^\infty(N))$$

が得られる．これを **ILH-鎖** と呼んでおくことにしよう．

擬微分作用素については実は次のことが知られている：

定理 1 任意の $H \in \sum_C^{(m)}(T^*N)$ に対して，$P_h(H): C_C{}^\infty(N) \to C_C^\infty(N)$ は，各 $L_2{}^k(N)$ から $L_2{}^{k-m}(N)$ への連続線形写像に一意的に拡張できる．

ところで，$L_2{}^k(N)$ のような空間は $P_h(H)$ 等が線形作用素として作用でき

れば良いのだから，$C_C^\infty(N)$ が持っていた環としての構造は問題にされていない．このことを明確に言い表わすために次の補題を用意する：

補題1　N' を $\dim N' = \dim N$（$=n$）であるような任意のコンパクト多様体とする．このとき，ILH-鎖 $\{L_2^k(N'),\ k\in \boldsymbol{Z}\}$ は，ILH-鎖 $\{L_2^k(N),\ k\in \boldsymbol{Z}\}$ に同形である．つまり，$C_C^\infty(N')$ から $C_C^\infty(N)$ の上への線形同形写像 U が存在し，次をみたす：

（1）　各 $k\in \boldsymbol{Z}$ に対し，U は $L_2^k(N')$ から $L_2^k(N)$ の上への線形同形写像に一意的に拡張される．

（2）　上で拡張された U は $k=0$ のときには $L_2(N')$ から $L_2(N)$ の上への等長変換である．

上の補題は N, N' 上にリーマン計量を任意に固定し，それに関するラプラシアン Δ, Δ' の固有関数どうしを対応させることで得られるが証明は省略する*)．線形空間として見れば，$C_C^\infty(N)$ は多様体 N の個性などほとんど反映していないのである**)．上の補題を用いて，$U^{-1}P_h(H)U$ を作れば，これは一般に擬微分作用素ではなくなるが，$C_C^\infty(N')$ 上の作用素であり，（$\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$，$*$）は $C_C^\infty(N')$ に働く作用素として表現できたことになる．多様体 N の性質は（$\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$，$*$）の極大可換部分環として作用素の代数の中に入っているのであって表現空間の中に入っているのではないのである．

しかし，$L_2^0(N)$ とか $L_2^0(N')$ の内積は $\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ にもう1つの重要な構造を与えるのである．

N 上の C^∞ の体積要素を dV とし，これによる内積を，

---

*）　H. Omori, Infinite Dimensional Lie Transformation Groups, Springer. L. N., 427, 1974, § XI 参照．

**）　このことが，場の理論では面倒な問題を引起す．

$$\langle f,\ g\rangle_0 = \int_N f(\boldsymbol{x})\,\overline{g(\boldsymbol{x})}\,dV_{\boldsymbol{x}}$$

とする．$H \in \sum_C^{(\infty)}(T^*N)$ に対し，$P_h(H)$ の **共役作用素** $P_h(H)^\dagger$ を，

$$\langle P_h(H)^\dagger f,\ g\rangle_0 = \langle f,\ P_h(H)\,g\rangle_0, \qquad f,\ g \in C_C{}^\infty(N)$$

によって定義する．擬微分作用素環は共役に関しても良い性質を持っており，次のことが成立する：

補題 2 $H \in \sum_C^{(m)}(T^*N)$ に対して，$H^\dagger \in \sum_C^{(m)}(T^*N)$ がただ1つ定まり，$P_h(H)^\dagger f = P_h(H^\dagger) f$ が任意の $f \in C_C{}^\infty(N)$ で成立する．さらに，$H^\dagger$ は次のように漸近展開される：

$$H^\dagger \sim \overline{H} + \frac{h}{i} b_1(H) + \cdots + \left(\frac{h}{i}\right)^l b_l(H) + \cdots$$

ただし，b_l は，$\sum_C^{(m)}(T^*N)$ から $\sum_C^{(m-1)}(T^*N)$ への線形写像である．

（$\sum_C^{(\infty)}(T^*N)$，$*$）は共役作用素を作る演算に関して閉じていることを上の補題は述べているのであるが，この演算はヒルベルト空間上の作用素として表現することにより得られていること，および，$P_h(H^\dagger)P_h(H)$ が正値（i.e. $\langle f,\ P_h(H^\dagger)\,P_h(H) f\rangle_0 \geqq 0$）であることに注目してもらいたい．

容易な計算で，

$$(H * H')^\dagger = H'^\dagger * H^\dagger, \qquad (H^\dagger)^\dagger = H$$

であることもわかる．また，$C_C{}^\infty(N)$ は（$\sum_C^{(\infty)}(T^*N)$，$*$）の単なる極大可換部分環ではなく，$C_C{}^\infty(N)^\dagger = C_C{}^\infty(N)$ をみたしていること，$C_C{}^\infty(N) \subset \sum_C^{(0)}(T^*N)$ であることなどがわかる．

そこで，こんどは，（$\sum_C^{(\infty)}(T^*N)$，$*$）の極大可換部分環 $\mathscr{A}$*) で $\mathscr{A}^\dagger = \mathscr{A}$ という性質を持ったものを考えよう．N は配位空間と解釈されて来たものだが，シンプレクティック多様体 $M = T^*N$ の方から見ると，（未定義だが，ラグランジェ束分解の底空間であるという以外には）特別扱いされる理由は

*）後の方の **12°** も参照されたい．

ないから，上の $\mathscr{A}$ のようなものも考察の対象にしなければならない．

$\mathscr{A}$ の元はすべて $H*H^\dagger=H^\dagger*H$（正規）だから，可換性より同時に対角化できる．したがって $\mathscr{A}$ はある位相空間 $\mathfrak{N}$ 上の連続関数全体のなす環 $C^0(\mathfrak{N})$ に埋込めるが，$\mathscr{A}\subset\Sigma_C^{(0)}(T^*N)$ でない限り，$\mathfrak{N}$ は一般にコンパクト集合にはならない．また，$\mathscr{A}\subset\Sigma_C^{(0)}(T^*N)$ であっても $\mathfrak{N}$ と N が同相となることは期待できないと思われる．

しかし，共役作用素を作る演算は関数空間との対応を考えるときに重要であるから，これを抽象的に扱う準備として，正錐というものを定義しておこう．

$\Sigma_C^{(0)}(T^*N)$ の中で $\lambda_1H_1^\dagger*H_1+\cdots+\lambda_kH_k^\dagger*H_k$, $\lambda_i\geqq 0$, の形で表わされる元の全体を P_+ と書き，$\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ の中の **正錐** と呼ぶ．P_+ が次の性質を持っていることは容易にわかる：

（a）　任意の $\lambda\geqq 0$ に対して $\lambda P_+\subset P_+$,

（b）　$A, B\in P_+$ ならば，$A+B\in P_+$,

（c）　$P_+\cap(-P_+)=\{0\}$，ただし $-P_+=\{-A\,;\,A\in P_+\}$ である，

（d）　$P_+\ni 1$.

$H^\dagger=H$ となるような $\Sigma_C^{(\infty)}(T^*N)$ の元を **エルミート元** と呼び，その全体を $\Sigma_H^{(\infty)}(T^*N)$ と書くと，$P_+{}^H=P_+\cap\Sigma_H^{(\infty)}(T^*N)$ も (a) ～ (d) の性質を持っている．しかも，次の性質も持っている：

（e）　$P_+{}^H-P_+{}^H=\Sigma_H^{(\infty)}(T^*N)$ *)（スペクトルが実数だから）.

正錐 $P_+{}^H$ は $H-H'\in P_+{}^H$ のとき $H\geqq H'$ と約束することにより $\Sigma_H^{(\infty)}(T^*N)$ に順序関係を定義する役目を持っている．

---

*）　$P_+{}^H-P_+{}^H=\{A-B\,;\,A, B\in P_+{}^H\}$

6° 電磁場

T^*N を n 次元 C^∞ 多様体 N の余接バンドルとし，π：$T^*N \to N$ を射影とする．$C_\nu^\infty(T^*N)$, $C_\nu^\infty(N)$ をそれぞれ，T^*N, N 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値の C^∞ 級関数全体のなす環とすれば，π^*：$C_\nu^\infty(N) \to C_\nu^\infty(T^*N)$ は単射同形写像だから，以後は $\pi^* C_\nu^\infty(N)$ と $C_\nu^\infty(N)$ とを同一視して同じ記号で書くことにする．

定義　$f \in C_\nu^\infty(T^*N)$ が k 次関数であるとは，任意の $q \in N$ に対して，f を $T_q{}^*N$ $(=\pi^{-1}(q))$ に制限したものが，$T_q{}^*N$ 上の $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値の k 次多項式になっている場合を言う．k 次関数の全体を $\mathcal{P}_\nu^{(k)}(T^*N)$ と書く．

さて，可換環 $C^\infty(T^*N)$ を変形（デフォルメ）することを考える．つまり，$C_\nu^\infty(T^*N)$ に非可換で結合律をみたす積 $*$ を導入することを考えるのだが，デフォルメした結果，もとのものが何も残らぬようでは困るから，ここでは次のような性質があるものを考えることにする：

（a）　$C_\nu^\infty(N)$ は通常の積に関して $(C_\nu^\infty(T^*N), *)$ の極大可換部分環．

（b）　$[C_\nu^\infty(N), \mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N)] \subset \nu C_\nu^\infty(N)$ であり，$f, g \in C_\nu^\infty(N)$, $h, k \in \mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N)$ に対して，$[f\cdot h, g\cdot k] = f\cdot g\cdot[h, k] + f\cdot[h, g]\cdot k + g\cdot[f, k]\cdot h$　が成立する．ただし，・は通常の積で，$[a, b] = a*b - b*a$ である．

（c）　局所決定性，局所一様性の仮定がみたされ，その結果，無限小部分として構成される代数は，T^*N の各点で階数 $2n$ $(=\dim T^*N)$ のワイル代数と同形である．

定義から，$C_\nu^\infty(N) \subset \mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N)$ であるが，斉次1次関数というものも T^*N 上で定義できるから，それの全体を $\mathcal{L}(T^*N)$ と書けば，$\mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N) = C_\nu^\infty(N) \oplus \mathcal{L}(T^*N)$ である．$\mathcal{L}(T^*N)$ の任意の元 h に対

し，$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(h)=\frac{1}{\nu}[h,\quad]$ は $C_\nu^\infty(N)$ に ν-微分として作用するから，$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(h)$ は $C_\nu^\infty(N)$-係数の N 上のベクトル場と思うことができる．これを $\tilde{X}(h)=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l X_l(h)$ と書く．(a) により，線形写像 $h\mapsto\tilde{X}(h)$ は単射となるが，任意の $C_\nu^\infty(N)$-係数のベクトル場が $\tilde{X}$ の像として得られることも明らかであろう．

補題1 N の局所座標系を $(x^1,\cdots,x^n)$，その定義域を U とすると，これに対応して，$\mathcal{L}(T^*U)$ 内に元 $\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n$ を，$-\frac{1}{\nu}[x^i,\tilde{y}_j]=\delta^i_j$ となるように選ぶことができる．

証明 $f,g\in C^\infty(T^*N)$ に対して，

$$\frac{1}{\nu}[f,g]=2P_1^-(f,g)+\cdots+\nu^{l-1}P_l^-(f,g)+\cdots,\qquad P_l^-(f,g)\in C^\infty(T^*N)$$

とし，$\{f,g\}=-2P_1^-(f,g)$ とすれば仮定 (c) より，$\{\ ,\ \}$ はいたる所階数が $2n$ ポアソン括弧になっている．T^*N 上の通常の局所座標系を $(x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n)$（1章 **9°** 参照）とし，$x^i$ は $C^\infty(N)$ の，y_i は $\mathcal{L}(T^*N)$ の元として定義域を拡大しておけば，(a) より $\{x^i,x^j\}=0$ だから，T^*U 上では行列 $A^i_j=\{x^i,y_j\}$ は正則行列であり，これより，行列

$$\tilde{A}^i_j=-\frac{1}{\nu}[x^i,y_j]=A^i_j+\nu a^{(1)i}{}_j+\nu^2a^{(2)i}{}_j+\cdots$$

にも逆行列が存在することがわかる．しかも，(a)，(b) より $\tilde{A}^i_j$ には変数 $y_1,\cdots,y_n$ が含まれていないこともわかる．

そこで，$(\tilde{A}^i_j)$ の逆行列 $(\tilde{B}^i_j)$ を使って，$\tilde{y}_i=\sum\tilde{B}^j_i\cdot y_j$ とおき (b) の計算公式を使えば，$-\frac{1}{\nu}[x^i,\tilde{y}_j]=\delta^i_j$ を得る． □

上で得られた $\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n$ は $\mathcal{L}(T^*N)$ の元として拡張できることに注意して，$\tilde{C}_{ij}=-\frac{1}{\nu}[\tilde{y}_i,\tilde{y}_j]$ とおき，ヤコビの恒等式を使うと，$[\delta^i_j,\tilde{y}_k]=0$ だから，$[x^k,\tilde{C}_{ij}]=0$ となり，$\tilde{C}_{ij}$ にも $\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n$，したがって $y_1,\cdots,y_n$ が含まれないことがわかる．

$$\tilde{C}_{ij} = C_{ij}^{(0)} + \nu C_{ij}^{(1)} + \cdots + \nu^l C_{ij}^{(l)} + \cdots$$

とおき，$\theta^{(l)} = \sum C_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{x})\,dx^i \wedge dx^j$ とおくと，次がわかる：

補題 2　$\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$, $\cdots$, $\theta^{(l)}$, $\cdots$ は N 上の閉微分形式である．

証明　N の別の局所座標系を $(\acute{x}^1, \cdots, \acute{x}^n)$，これに伴う T^*N のそれを $(\acute{x}^1, \cdots, \acute{x}^n, \acute{y}_1, \cdots, \acute{y}_n)$ とすると，座標変換は，

$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad \acute{y}_i = \sum \frac{\partial x^j}{\partial \acute{x}^i} y_j$$

で与えられるから，

$$\tilde{A}'^i_j = -\frac{1}{\nu}\,[\acute{x}^i, \acute{y}_j] = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^j} \frac{1}{\nu}[\acute{x}^i, y_k] = \sum_{k,l} \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^j} \tilde{A}^l_k$$

である．$(\tilde{A}'^i_j)$ の逆行列を $(\tilde{B}'^i_j)$ とし，$\tilde{y}'_i = \sum \tilde{B}'^j_i y_j$ とおけば，$\tilde{y}'_i = \sum \dfrac{\partial x^a}{\partial \acute{x}^i} \tilde{y}_a$ となるから，$-\dfrac{1}{\nu}\,[\tilde{y}'_i, \tilde{y}'_j]$ を計算すると，座標関数の 2 階微分の項は消えて，

$$\tilde{C}'_{ij} = -\frac{1}{\nu}[\tilde{y}'_i, \tilde{y}'_j] = \sum \frac{\partial x^a}{\partial \acute{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \acute{x}^j} \tilde{C}_{ab}$$

を得る．したがって，$\tilde{\theta} = \sum \tilde{C}_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$ は座標系によらず，N 上の 2 次微分形式として意味を持つ．

一方，ヤコビ恒等式より，$[\tilde{y}_i, [\tilde{y}_j, \tilde{y}_k]] + [\tilde{y}_j, [\tilde{y}_k, \tilde{y}_i]] + [\tilde{y}_k, [\tilde{y}_i, \tilde{y}_j]] = 0$ だから，$\dfrac{1}{\nu}[\tilde{y}_i, \quad] = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ を使って計算すれば，$d\tilde{\theta} = 0$ がわかる．　□

物理学においては，“配位空間”としての N を考え力学を記述するために自然なシンプレクティック構造を持った T^*N を考えることが多いが，その場合通常の構造からのずれを示している $\theta^{(0)}$ の部分を電磁場と解釈することが多い．$\theta^{(0)}$ が N 上の 1 次微分形式 $\boldsymbol{A}$ を使って，$\theta^{(0)} = d\boldsymbol{A}$ と書けるとき，$\boldsymbol{A}$ を **電磁ポテンシャル** と呼ぶ．$\theta^{(0)}$ が電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を持つときには，$\boldsymbol{A} = \sum A_i(\boldsymbol{x})\,dx^i$ と書き，

$$\eta_i = \tilde{y}_i - A_i(\boldsymbol{x}) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

と変換すれば，$(x^1, \cdots, x^n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ に関しては，$\{\ ,\ \}$ は

$$\{x^i, x^j\} = \{\eta_i, \eta_j\} = 0, \qquad \{x^i, \eta_j\} = \delta^i_j$$

となり，シンプレクティック多様体として見れば電磁場は座標系の中に組入れてしまうことができる．このことは，$\tilde{\theta}=d\tilde{A}$ となる場合も同様であるが，使用する変換には ν が入ってくるので，座標変換の意味を少し拡張しておかねばならない．これらの場合には，$(C_\nu^\infty(T^*N), *)$ は1章 **9°** で与えた通常のワイル関数環と同形になるのである．

これで，大体 $\tilde{\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l\theta^{(l)}$ のコホモロジー類が $(C_\nu^\infty(T^*N), *)$ の同形類と深く関係していることが推察できるが，$\tilde{\theta}$ としてはどのような閉微分形式が現れるかという問題を考えなければならない．以下，この節ではそれを考える．

定理1 N 上の任意の2次閉微分形式 $\tilde{\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l\theta^{(l)}$ に対して，$C_\nu^\infty(T^*N)$ 上の $*$-積で，この節の最初の仮定(a)，(b)，(c)をみたし，さらに次の性質を持つものが存在する：

T^*N の通常の局所座標系を $(x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n)$ とし，$\tilde{\theta}=\sum\tilde{a}_{ij}(\boldsymbol{x})dx^i\wedge dx^j$ とすると，

$$[x^i, x^j]=0, \qquad [x^i, y_j]=-\nu\delta_j^i, \qquad [y_i, y_j]=\nu\tilde{a}_{ij}(\boldsymbol{x}).$$

上の定理はいくつかの補題を通して，以下で行う．まず $\mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N)=\mathcal{L}(T^*N)\oplus C_\nu^\infty(N)$ をリー環にしよう．$\mathcal{L}(T^*N)$ の元 $h=\sum h^i\cdot y_i$ に対し N 上のベクトル場 $\tilde{X}(h)$ を $\sum h^i\partial_{x^i}$ で定義し，$[\tilde{X}(h), \tilde{X}(h')]'$ をベクトル場のリー括弧積とする．さらに，$[h, h']'$ を

$$[\tilde{X}(h), \tilde{X}(h')]=\tilde{X}([h, h']')$$

で定義すると，$\mathcal{L}(T^*N)$ は $[\ ,\ ]'$ に関してリー環となり，$f, f'\in C_\nu^\infty(N)$ に対して

$$[f\cdot h, f'\cdot h']'=f\cdot f'[h, h']'+f\cdot(\tilde{X}(h)f')\cdot h'-f'\cdot(\tilde{X}(h')f)\cdot h$$

が成立する．そこで $\mathcal{L}(T^*N)\oplus C_\nu^\infty(N)$ の元 $h+f, h'+f'$ に対し

$$[h+f, h'+f']'=[h, h']+\tilde{X}(h)f'-\tilde{X}(h')f+\tilde{\theta}(\tilde{X}(h), \tilde{X}(h'))$$

と定義すれば，$d\tilde{\theta}=0$ を使って，$(\mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N),\ [\ ,\ \ ]')$ がリー環となることが容易に確められる.

上とは別に，TN を N の接バンドルとし，これから $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$ を係数環としてテンソル環の代数束 $\otimes_\nu TN$ を作る．これの C^∞ 切断の全体を $\Gamma(\otimes_\nu TN)$ とする．$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)=\bigcup_k \mathcal{P}_\nu^{(k)}(T^*N)$ の元は対称テンソル場として自然に $\boldsymbol{\Gamma}(\otimes_\nu TN)$ の元と思えることに注意しよう．そこで $\boldsymbol{\Gamma}(\otimes_\nu TN)$ 内で，

$$(h+f)\otimes(h'+f')-(h'+f')\otimes(h+f)-\nu[h+f,\ h'+f']'$$

で生成される両側イデアルを考え，それを $\mathcal{I}$ とする.

$S=\boldsymbol{\Gamma}(\otimes_\nu TN)/\mathcal{I}$ とすると，S は結合律をみたす代数で，$(C_\nu^\infty(N),\ \cdot)$ は自然に可換部分環として S に含まれている. さらに, S では（定義域を適当に拡張した意味で）

$$[x^i,\ x^j]=0\,,\qquad [x^i,\ y_j]=-\nu\delta_j^i,\qquad [y_i,\ y_j]=\nu\tilde{a}_{ij}$$

が成立している．これを使うと，S では (a), (b) が成立していることが容易にわかる.

補題 3　$S\cong\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$

証明　$\mathcal{I}$ の形より，$S/\nu S$ は可換環となり，これは，TN 上の対称テンソル環の代数束の C^∞ 切断全体，つまり対称テンソル場全体と同形である．これは自然に T^*N 上の $C^\infty(N)$ 係数の多項式環 $\mathcal{P}^{(\infty)}(T^*N)$ と一致する. しかも, $\mathcal{P}^{(\infty)}(T^*N)$ は対称テンソル場の全体として S に含まれているとして良い．したがって，$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)=\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]\otimes\mathcal{P}^{(\infty)}(T^*N)$ も S に含まれているが, S は $\mathcal{P}_\nu^{(1)}(T^*N)$ より生成されるから，$S\cong\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ となる.　□

上の補題により $\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ 上に $*$-積が定義できたことになるのだが，この場合，$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ の元は対称テンソル場と同一視されていることを記憶しておいてほしい.

$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ における $*$-積の計算はテンソル場の計算になっているから，

もう少し詳しく見てみよう.

まず, $x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n$ を T^*N の通常の局所座標系とし, その定義域を $\pi^{-1}U$ とする. さらに, x^i は N 上の関数に, y_i は T^*N 上の1次関数に拡張しておくが, 以下の計算はすべて $\pi^{-1}U$ 上で考えることにする.

一般に, $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \cdots, Z_{i_k}$ の対称テンソル積 $Z_{i_1} \circledS Z_{i_2} \circledS \cdots \circledS Z_{i_k}$ は,

$$Z_{i_1} \circledS \cdots \circledS Z_{i_k} = \frac{1}{k\,!} \sum_{\sigma \in S(k)} \otimes Z_{i_{\sigma(1)}} \otimes Z_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes Z_{i_{\sigma(k)}}$$

で与えられるから, これをもとに計算すると,

$$\begin{aligned} & Z_j \otimes (Z_{i_1} \circledS \cdots \circledS Z_{i_k}) \\ (1) \quad & = Z_j \circledS Z_{i_1} \circledS \cdots \circledS Z_{i_k} + \frac{1}{2\,!} \sum_{l=1}^{k} [Z_j, Z_{i_l}] \circledS Z_{i_1} \circledS \cdots \check{Z}_{i_l} \cdots \circledS Z_{i_k} \\ & \quad + \frac{1}{3\,!} \sum_{l<m} [[Z_j, Z_{i_l}], Z_{i_m}] \circledS Z_{i_1} \circledS \cdots \check{Z}_{i_1} \cdots \check{Z}_{i_m} \cdots \circledS Z_{i_k} + \cdots \end{aligned}$$

の形が得られる.

$*$-積の計算は上のように書いたとき $[Z_j, Z_{i_l}]$ 等の所に $\mathscr{I}$ が定める関係式を代入することで実行される.

そこで, まず $x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n$ に関する通常の積を, 対称テンソル積と考えよう. すると, $[x_i, [y_j, x_k]] = 0$ だから,

$$(2) \qquad y_i * \boldsymbol{x}^{\alpha} = y_i \cdot \boldsymbol{x}^{\alpha} + \frac{\nu}{2} \partial_{x^i} \boldsymbol{x}^{\alpha}$$

が得られ, $\mathscr{I}$ が与える関係式 $[y_i, g(\boldsymbol{x})] = \partial_{x^i} g(\boldsymbol{x})$ と矛盾しない. (2) は $\boldsymbol{x}$ の多項式についても成立するから, 多項式近似定理を用いて, 一般の $g(\boldsymbol{x})$ に対して

$$(3) \qquad y_i * g(\boldsymbol{x}) = y_j \cdot g(\boldsymbol{x}) + \frac{\nu}{2} \partial_{x^i} g(\boldsymbol{x})$$

を得る. $y_i * (y_j \cdot \boldsymbol{x}^{\alpha})$ は $[[y_i, y_j], \boldsymbol{x}^{\gamma}] = 0$ と (1) を使うと,

$$\begin{aligned} (4) \qquad y_i * (y_j \cdot \boldsymbol{x}^{\alpha}) &= y_i \cdot y_j \cdot \boldsymbol{x}^{\alpha} + \frac{\nu}{2} (a_{ij} \cdot \boldsymbol{x}^{\alpha} + y_j \cdot \partial_{x^i} \boldsymbol{x}^{\alpha}) \\ & \quad + \frac{\nu^2}{6} \partial_{x^i} \partial_{x^j} \boldsymbol{x}^{\alpha} \end{aligned}$$

となり，一般の $g(\boldsymbol{x})$ に対しては次の式となる．

$$(5) \qquad y_i * (y_j \cdot g(\boldsymbol{x})) = y_i \cdot y_j \cdot g(\boldsymbol{x}) + \frac{\nu}{2}(a_{ij} \cdot g(\boldsymbol{x}) + y_j \cdot \partial_{x^i} g) + \frac{\nu^2}{6} \partial_{x^i} \partial_{x^j} g \,.$$

以下同様の計算で $*$-積は計算されるが，これらは代数演算と微分演算の組合わせであるから，局所決定性があるのは明らかであろう．

次に，$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ を $C_\nu^\infty(T^*N)$ に埋込むのであるが，これは無論，対称テンソル積を通常の積に読みかえることで行う．

補題 4 $*$: $\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N) \times \mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N) \to \mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ は C^∞ 位相に関して連続な双線形写像である．

証明 $C_\nu^\infty(T^*N) = \prod_{l=0}^{\infty} \nu^l C^\infty(T^*N)$ であり，$C_\nu^\infty(T^*N)$ の C^∞ 位相は $C^\infty(T^*N)$ の C^∞ 位相から直積位相を入れることで得られていた．したがって，h, $h' \in \mathcal{P}^{(\infty)}(T^*N)$ に対して，

$$h * h' = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l P_l(h, h'), \qquad P_l(h, h') \in \mathcal{P}^{(\infty)}(T^*N)$$

と書いたとき，各 P_l が C^∞ 位相に関して連続であることを言えば良いのであるが，上の計算からもわかるように，ν は [,] の演算を行うときしか現われないのだから，P_l は高々 $2l$ 階の双線形微分作用素である．したがって C^∞ 位相に関して連続となる． □

$\mathcal{P}_\nu^{(\infty)}(T^*N)$ は $C_\nu^\infty(T^*N)$ の中で稠密であるから，上の補題によって $*$-積は $C_\nu^\infty T^*N)$ 上に一意的に拡張できることがわかる．これで，定理 1 は局所一様性の部分を除けば証明できたことになる．ここの部分は次節にまわそう．

7° 局所標準座標系（量子化されたダルブーの定理）

まず，前節の続きを考えよう．前節では閉微分形式 $\tilde{\theta}$ に応じて $C_\nu^\infty(T^*N)$ 上に $*$-積が定義され，それは局所座標系 $x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n$ に関して

$$[x^i, x^j]=0, \qquad [x^i, y_j]=-\nu\delta^i_j, \qquad [y_i, y_j]=\nu\tilde{a}_{ij}$$

という性質を持っていた．上の座標関数の定義域を $\pi^{-1}U$ とする．上の $*$-積は局所決定性があったから，$*$-積は $C_\nu^\infty(\pi^{-1}U)$ にも定義できているわけであるが，$(C_\nu^\infty(\pi^{-1}U), *)$ がどのような代数であるかを考えよう．

まず，N の開集合 U は $\boldsymbol{R}^n$ の開球と同位相としよう．そうすると，U 上では1次微分形式 $\tilde{\eta}_U$ を使って $\tilde{\theta}=d\tilde{\eta}_U$ と書くことができる．そこで $\tilde{\eta}_U=\sum_{i=1}^n \tilde{\eta}_i(\boldsymbol{x})\,dx^i$ とおき，

$$\hat{x}^i=x^i, \qquad \hat{y}_i=y_i-\tilde{\eta}_i(\boldsymbol{x}) \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

と変換すれば，

$$(1) \qquad [\hat{x}^i, \hat{x}^j]=[\hat{y}_i, \hat{y}_j]=0, \qquad [\hat{x}^i, \hat{y}_j]=-\nu\delta^i_j$$

となる．$\hat{y}_i$ には ν が含まれてしまうので $(\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^n, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n)$ は T^*N の局所座標関数ではないが，$C_\nu^\infty(\pi^{-1}U)$ の元はすべて $\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^n, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n$ の関数として表示できる．$\tilde{\eta}_i=\tilde{\eta}_i^{(0)}+\nu\tilde{\eta}_i'$ のとき，$y_i=\hat{y}_i+\tilde{\eta}_i^{(0)}+\nu\tilde{\eta}_i'$ だから，任意の $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}+\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(0)}(\hat{\boldsymbol{x}})+\nu\tilde{\boldsymbol{\eta}}'(\hat{\boldsymbol{x}}))$$

と書いて ν に関してテイラー展開をすれば良い．（正確には多項式近似定理を用いなければならない．）これより，$\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^n, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n$ を独立変数として，あたかも座標関数のごとくに取扱って良いことがわかる．

すると，(1) を使って，1章 **4°** でやったように $\odot$-積が定義できる．$\odot$-積は通常の積・とは一致しないが，$(C_\nu^\infty(\pi^{-1}U), \cdot)$ と $(C_\nu^\infty(\pi^{-1}U), \odot)$ は位相代数として同形である．さらに，

$$(2) \qquad f*g=f\exp\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\hat{\boldsymbol{y}}}\odot\overrightarrow{\partial}_{\hat{\boldsymbol{x}}}-\overleftarrow{\partial}_{\hat{\boldsymbol{x}}}\odot\overrightarrow{\partial}_{\hat{\boldsymbol{y}}})g$$

なる積の公式が存在している．通常の座標変換の公式と同じ計算で，次の式が容易に示される．

(3) $$\overleftarrow{\partial}_{\hat{y}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\hat{x}} - \overleftarrow{\partial}_{\hat{x}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\hat{y}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \overleftarrow{\partial}_{y_i} \odot \overrightarrow{\left(\partial_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial x^i} \cdot \partial_{y_j} \right)} - \overleftarrow{\left(\partial_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial x^i} \cdot \partial_{y_j} \right)} \odot \overrightarrow{\partial}_{y_i} \right\}$$

しかし，(3) の右辺を

$$\overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{y}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\boldsymbol{x}} - \overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{y}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\boldsymbol{x}} + \sum_{i,j} \overleftarrow{\partial}_{y_i} \cdot \tilde{\alpha}_{ij}(\boldsymbol{x}) \cdot \overrightarrow{\partial}_{y_j}$$

のように書いてしまうといろいろ誤解が生じてしまうのでよろしくない．ともあれ，$(C_\nu^\infty(\pi^{-1}U),\ \odot) \cong (C_\nu^\infty(\pi^{-1}U),\ \cdot)$ だから，(2) の積公式により $(C_\nu^\infty(\pi^{-1}U),\ *)$ がワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{\pi^{-1}U}$ 上のワイル関数全体になっていることがわかる．これで前節で残っていた局所一様性の部分が証明されたことになるが，$\odot$-積はあくまで局所的にしか定義されていないことに注意してもらいたい．前節では対称テンソル環をうまく利用したが，それは余接バンドルという T^*N の構造を使っているからできたことで，$\odot$-積で定義される $\hat{y}_{i_1} \odot \hat{y}_{i_2} \odot \cdots \odot \hat{y}_{i_k}$ のようなものに大域的意味を持たせることはできない．

しかし，局所的にしろ $\odot$-積が定義できればワイル多様体との関連を見るのに便利ではあるから，以下でそれを詳しく見ておこう．

M を $2n$ 次元 C^∞ パラコンパクト多様体とし，$C_\nu^\infty(M)$ 上に次のような $*$-積が定義されているものとしよう：$f,\ g \in C^\infty(M)$ に対して，

$$f * g = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l P_l(f,\ g), \qquad P_l(f,\ g) \in C^\infty(M)$$

としたとき，

(A) $P_0(f,\ g) = f \cdot g, \quad P_1(f,\ g) = -P_1(g,\ f)$,

(B) 各 $q \in M$ で，$P_1(f,\ g)(q)$ の階数は $2n$,

(C) 局所決定性，局所一様性の仮定がみたされる．

仮定 (B) より M はシンプレクティック多様体になる．したがって，ダルブ

一の定理により局所的には正準座標系と称する特殊な座標系がとれるが，実はこの定理を量子化したような，次の形の定理が成立する：

定理1　M の各点 q について，q の近傍 U と $C_\nu^\infty(M)$ の元 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ が存在し，次の性質を持つ．

（a）　U 上では，　$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$，$[x_i, y_j] = -\nu\delta_{ij}$．

（b）　$C_\nu^\infty(U)$ の元は $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ の関数として一意的に表示できる．

上の定理は1章 **7°** の定理と基本的には同じものであり証明も全く同じ（**4°** の定理4参照）であるから省略する．しかも，(a) より，1章 **4°** でやったようにして⊙-積が定義される．この⊙-積は $C_\nu^\infty(U)$ 上でしか定義できないし，T^*N の場合で見たように通常の積とは一致しないが，$(C_\nu^\infty(U), \odot) \cong (C_\nu^\infty(U), \cdot)$ である．

そこで，U と同相な $\boldsymbol{R}^{2n}$ 内の開集合 U' を用意し，$(C_\nu^\infty(U), \odot) = (C_\nu^\infty(U'), \cdot)$ と考えてみれば，$(C_\nu^\infty(U), *)$は，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{U'})$ と思って良いことになり，$(C_\nu^\infty(M), *)$ は M 上のあるワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ のワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ と同形になる．

つまり，$(C_\nu^\infty(M), *)$ を $C^\infty(M)$ の変形と見ている間はまだ通常の積が残っているのであるが，これをワイル多様体上のワイル関数環と見た場合には通常の積はどこかへ行ってしまい，$\nu = 0$ としなければ見えてこない古典的なものに変質してしまうのである．

しかし，通常の積は何か対称テンソル環のような形で残っているはずであるから，これを$*$-積の方から⊙-積を定義するような考え方でつかまえられないものであろうか？　次節以降ではそういうことを考えよう．

8° 次数作用素の場，調和振動子の場

話を少し一般にして，M を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とし，M を底空間に持つワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ を考える．$\boldsymbol{W}_M$ は階数 $2n$ のワイル代数 $\boldsymbol{W}_{2n}$ と同形な環をファイバーとする代数束で，点 $p \in M$ におけるファイバー $\boldsymbol{W}_p$ は，ワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ の p における無限小部分と考えて良いものであった．したがって，別の点 p' における $\boldsymbol{W}_{p'}$ は $\boldsymbol{W}_p$ と同形ではあるが，$\boldsymbol{W}_{p'}$ の元を p の所に移動して考えるとか，元どうしを比較するといったことが自由にできない．比較のためには共通の「物指し」のようなものが必要だが，それが与えられていないからである．

そういう「物指し」にあたるものをこの節で考えよう．

定義1 ベクトル束としての束準同形写像 $\tilde{D}$: $\boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ が **次数作用素の場** であるとは，$\tilde{D}$ が次をみたす場合を言う．

（1） 各 $p \in M$ に対して，$\tilde{D}\boldsymbol{W}_p \subset \boldsymbol{W}_p$ で， $\tilde{D}\nu = 2\nu$．

（2） 各 $\boldsymbol{W}_p$ で，$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$, $[X_i, Y_j] = -\nu\delta_{ij}$ をみたす生成元 $(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$ があって，$\tilde{D}X_i = X_i$, $\tilde{D}Y_j = Y_j$ となる．

（3） 任意の $a, b \in \boldsymbol{W}_p$ に対し，$\tilde{D}(a * b) = (\tilde{D}a) * b + a * (\tilde{D}b)$．

（4） $\tilde{D}$ の局所座標表示, D_λ: $V_\lambda \times \boldsymbol{W}_{2n} \to V_\lambda \times \boldsymbol{W}_{2n}$, $D_\lambda = \Phi_\lambda \tilde{D} \Phi_\lambda^{-1}$ をとると，任意に固定した $a \in \boldsymbol{W}_{2n}$ ごとに，$D_\lambda(x, a)$ は $x \in V_\lambda$ に関して C^∞ 級写像である．

1の分解定理を使うと，任意のワイル多様体上に次数作用素が存在することが示せるのであるが，それは省略して，次数作用素の意味を説明しておこう．

上の記号で，$\tilde{D}(\nu^l X_1^{\alpha_1} \odot X_2^{\alpha_2} \odot \cdots \odot X_n^{\alpha_n} \odot Y_1^{\beta_1} \odot \cdots \odot Y_n^{\beta_n})$ を計算してみれば容易に，$(2l + |\alpha| + |\beta|)\nu^l X_1^{\alpha_1} \odot \cdots \odot X_n^{\alpha_n} \odot Y_1^{\beta_1} \odot \cdots \odot Y_n^{\beta_n}$ であることがわかる．つまり，単項式の次数が固有値になっているのである．逆

に $\widetilde{D}$ を使って $\boldsymbol{W}_p$ の元が“何次式”であるかをきめていこうとしているのである．

次の定理は容易なので証明は省略する．

定理1　各点 $p \in M$ において，$\widetilde{D}$ の固有値は自然数全体 $\boldsymbol{N}$ （0を含む）であり，$\boldsymbol{W}_p(k)$ を固有値 k の $\widetilde{D}$ の固有空間とすれば，$\boldsymbol{W}_p(0)=\boldsymbol{R}$, $\dim \boldsymbol{W}_p(1)=2n$, $\boldsymbol{W}_p(1)^k=\boldsymbol{W}_p(k)$ である．

$\boldsymbol{W}_p(1)$ の元を p における **1次式** と呼んでおこう．次数作用素の場はこのように，各点で何が1次式かをきめる働きをするのである．

上の定理より，$[\boldsymbol{W}_p(1), \boldsymbol{W}_p(1)] \subset \boldsymbol{W}_p(2)$ であるが，＊-積の性質より，$[\boldsymbol{W}_p(1), \boldsymbol{W}_p(1)] \subset \nu \boldsymbol{W}_p$ でもあり，ν は2次だから，$-\dfrac{1}{\nu}[\boldsymbol{W}_p(1), \boldsymbol{W}_p(1)] \subset \boldsymbol{R}$ でなければならない．この歪対称2次形式を

$$\{\ ,\ \}_p:\quad \boldsymbol{W}_p(1) \times \boldsymbol{W}_p(1) \to \boldsymbol{R}$$

と表わせば，$\{\ ,\ \}_p$ の階数が $2n$ であることが定義1の(2)より容易にわかる．

$\boldsymbol{W}_p$ は，p における形式的ベキ級数環 $\Phi_{\nu,p}^{(2n)}$ と線形同形だから，上のことは $\Phi_{\nu,p}^{(2n)}$ のどういう元が1次式であるかが与えられたのだと思って良い．しかし次のことに注意されたい．$\boldsymbol{W}_M(1)=\bigcup_{p \in M} \boldsymbol{W}_p(1)$ は $\boldsymbol{W}_M$ の部分束であるが，ワイル座標関数 $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ が $\boldsymbol{R}_M \oplus \boldsymbol{W}_M(1)$ の局所的切断としてとれるということは，M が特別な場合（平坦）以外には存在しない．

次数作用素とは別に，1次元リー群 $S^1=\{e^{i\theta};\ \theta \in \boldsymbol{R}\}$ が $\boldsymbol{W}_M$ に束同形写像として C^∞ 級に作用しているものとし，この作用を $\rho:\ S^1 \times \boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ とする．さらに $\rho_{\exp i\theta}:\ \boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ は底空間には恒等写像を引起しているものとする．

定義2　上の $\rho:\ S^1 \times \boldsymbol{W}_M \to \boldsymbol{W}_M$ が次をみたすとき，**調和振動子の場** と呼ぶ：

（1） 各 $p \in M$ において，$\rho_{\exp i\theta}$： $\boldsymbol{W}_p \to \boldsymbol{W}_p$ は ν-同形写像.

（2） 各 $p \in M$ で，ρ は $\boldsymbol{W}_{p,(1)}/\boldsymbol{W}_{p,(2)}$ 上への S^1 の作用 $\tilde{\rho}$ を引起すが，$\tilde{\rho}_{\exp i\theta}$ は自明でない不動元を持たない.（$\tilde{\rho}$ が S^1 の free action ということ. 下の解説参照.）

上の定義について少し解説しておこう. $\boldsymbol{W}_{p,(k)} = \prod_{l \geq k} \boldsymbol{W}_p(l)$ とすれば，$\boldsymbol{W}_{p,(1)}$ は $\boldsymbol{W}_p$ の唯一の極大両側イデアルであり，$\boldsymbol{W}_{p,(1)}{}^k = \boldsymbol{W}_{p,(k)}$ が成立する. $\rho_{\exp i\theta}$： $\boldsymbol{W}_p \to \boldsymbol{W}_p$ は ν-同形写像だから，$\rho_{\exp i\theta} \boldsymbol{W}_{p,(1)} = \boldsymbol{W}_{p,(1)}$ であり，したがって $\rho_{\exp i\theta} \boldsymbol{W}_{p,(k)} = \boldsymbol{W}_{p,(k)}$ も成立する. それ故，$\rho_{\exp i\theta}$ は $\boldsymbol{W}_{p,(1)}/\boldsymbol{W}_{p,(2)}$ に線形同形写像 $\tilde{\rho}_{\exp i\theta}$ を引起すが，これが S^1 の作用となることは明らかであろう. この作用を

$$\tilde{\rho}\colon S^1 \times \boldsymbol{W}_{p,(1)}/\boldsymbol{W}_{p,(2)} \to \boldsymbol{W}_{p,(1)}/\boldsymbol{W}_{p,(2)}$$

と書く. このとき，「ある $e^{i\theta} \neq 1$ で，$\tilde{\rho}_{\exp i\theta}(\tilde{u}) = \tilde{u}$ ならば，$\tilde{u} = 0$」という性質が各 $p \in M$ で成立することを上の定義の (2) は要求しているのである.

実は任意のワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上に調和振動子場が存在するのであるが，証明は手間がかかるので省略する.

上の調和振動子場 ρ は，先に与えた次数作用素場 $\widetilde{D}$ と一応何の関係も持たないが，次の定理で述べるように $\widetilde{D}$ を改造すると，両者が可換になるようにできる.

定理 2 次数作用素場 $\widetilde{D}$ と，調和振動子場 ρ とがワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上に与えられたとき

$$\widetilde{D}_0 = \int_{S^1} \rho_{\exp i\theta} \widetilde{D} \rho_{\exp(-i\theta)} \, d\theta$$

は $\boldsymbol{W}_M$ 上の次数作用素場であり，しかも $\rho_{\exp i\theta} \widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_0 \rho_{\exp i\theta}$ が任意の $\theta \in \boldsymbol{R}$ で成立する.

証明 $\widetilde{D}$ は微分，$\rho_{\exp i\theta}$ は ν-同形写像だから，$\widetilde{D}_0$ が微分であり，$\widetilde{D}_0 \nu = 2\nu$ とな

ることは明らかであろう．

$$\rho_{\exp i\theta_0}\widetilde{D}_0 = \int_{S^1} \rho_{\exp i(\theta+\theta_0)}\widetilde{D}\rho_{\exp(-i\theta)}\,d\theta$$
$$= \int_{S^1} \rho_{\exp i(\theta+\theta_0)}\widetilde{D}\rho_{\exp(-i(\theta+\theta_0))}\,d(\theta+\theta_0)\cdot\rho_{\exp i\theta_0}$$

だから，$\theta+\theta_0$ を θ' におきかえて積分すれば，右辺は $\widetilde{D}_0\rho_{\exp i\theta_0}$ となる．

$\boldsymbol{W}_p(1)$ の基底を $(Z_1, \cdots, Z_{2n})$ とすれば，容易に，

（1）　$\widetilde{D}_0 Z_i = Z_i + b_i^{(2)} + \cdots + b_i^{(k)} + \cdots,\qquad b_i^{(k)} \in \boldsymbol{W}_p(k)$

の形であることがわかり，これより，任意の $a \in \boldsymbol{W}_p(k)$ に対して，$\widetilde{D}_0 a \in ka + \boldsymbol{W}_{p,(k+1)}$ であることもわかる．そこで (1) の $b_i^{(2)}$ を使って，$\widetilde{D}_0(Z_i - b_i^{(2)})$ を計算してみれば

（2）　$\widetilde{D}_0(Z_i - b_i^{(2)}) = Z_i - b_i^{(2)} + c_i^{(3)} + \cdots + c_i^{(k)} + \cdots,$
$c_i^{(k)} \in \boldsymbol{W}_p(k)$

の形になることがわかる．$\widetilde{D}_0(Z_i - b_i^{(2)} - \frac{1}{2}c_i^{(3)})$ を計算すればこれが $Z_i - b_i^{(2)} - \frac{1}{2}c_i^{(3)} + d_i$，$d_i \in \boldsymbol{W}_{p,(4)}$ の形であることがわかる．以下この方法を繰返して，各 i，$1 \leqq i \leqq 2n$ で

（3）　$\widehat{Z}_i = Z_i + a_i^{(2)} + \cdots + a_i^{(k)} + \cdots,\qquad a_i^{(k)} \in \boldsymbol{W}_p(k)$

の形をした元で，$\widetilde{D}_0\widehat{Z}_i = \widehat{Z}_i$ となるものが作れる．(3) の形から，$(\widehat{Z}_1, \cdots, \widehat{Z}_{2n})$ が $\boldsymbol{W}_p$ を生成すること，$\widehat{Z}_1, \cdots, \widehat{Z}_{2n}$ を適当に線形変換すれば $(\widehat{X}_1, \cdots, \widehat{X}_n, \widehat{Y}_1, \cdots, \widehat{Y}_n)$ で $\widetilde{D}_0\widehat{X}_i = \widehat{X}_i$，$\widetilde{D}_0\widehat{Y}_i = \widehat{Y}_i$ で，かつ $[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = [\widehat{Y}_i, \widehat{Y}_j] = 0$，$[\widehat{X}_i, \widehat{Y}_j] = -\nu\delta_{ij}$ をみたすものが作れることがわかる．よって，$\widetilde{D}_0$ は次数作用素場である．
□

上の証明では，$\boldsymbol{W}_p(k)$ は $\widetilde{D}$ に関する固有空間であったが，以下では $\boldsymbol{W}_p(k)$ は $\widetilde{D}_0$ に関する固有値 k の固有空間であるとしよう．$\rho_{\exp i\theta}\widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_0\rho_{\exp i\theta}$ であるから，$\boldsymbol{W}_p(k)$ は $\rho_{\exp i\theta}$ で不変な部分空間となる．したがって調和振動子場は各 $\boldsymbol{W}_M(k) = \bigcup_{p\in M} \boldsymbol{W}_p(k)$ に作用するわけである．

ところで，S^1 の作用は C^∞ 級であったから，$u \in \boldsymbol{W}_p$ に対し

(4) $$\tilde{J}u = \frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} \rho_{\exp i\theta}(u)$$

と定義すると，$\rho_{\exp i\theta}$ が ν-同形写像だったから，$\tilde{J}$ は各 $p \in M$ に対して $\boldsymbol{W}_p$ 上の ν-微分（ $\tilde{J}\nu = 0$ となる微分）となり，さらに，$\tilde{J}\boldsymbol{W}_p(k) = \boldsymbol{W}_p(k)$ をみたす．

定理 3 任意の $u \in \boldsymbol{W}_p(1)$ に対して $\tilde{J}^2 u = -u$ であり，$\dfrac{1}{\nu}[u, \tilde{J}v]$ は $\boldsymbol{W}_p(1) \times \boldsymbol{W}_p(1)$ から $\boldsymbol{R}$ への対称な双 1 次写像である．しかもこれは正値定符号である．

証明 $\tilde{J}$ を $\boldsymbol{W}_p(1)$ に制限したものを J とする（i.e. $\tilde{J} \mid \boldsymbol{W}_p(1) = J$ ）．容易に，$e^{\theta J} = \rho_{\exp i\theta} \mid \boldsymbol{W}_p(1)$，任意の $u, v \in \boldsymbol{W}_p(1)$ に対して $\dfrac{1}{\nu}[u, v] \in \boldsymbol{R}$ であることがわかる．次に，$\boldsymbol{W}_p(1)$ を複素化して $\boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{W}_p(1)$ を考えるのだが，$\dfrac{1}{\nu}[u, v]$ の方を $\boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}} \times \boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}}$ 上に拡張するときには，$\bar{\nu} = -\nu$ と考え*)，

$$\frac{1}{\nu}[iu, v] = i\frac{1}{\nu}[u, v], \qquad \frac{1}{\nu}[u, iv] = i\frac{1}{\nu}[u, v]$$

となるように拡張し，J の方もそのまま $Jiu = iJu$ となるように拡張する．J: $\boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}} \to \boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}}$ は $\boldsymbol{C}$ 係数で線形だから，J のジョルダン標準形を考えれば $e^{2\pi J} = 1$ だから，J は対角化できる行列で固有値は il（l は整数）の形でなければならないことがわかる．さらに $e^{i\theta} \neq 1$ なる θ で $e^{\theta J}u = u$（$u \neq 0$）となることがないのだから J の固有値は $\pm i$（共に n 重）である．したがって，$J^2 = -1$ である．

$u, v \in \boldsymbol{W}_p(1)$ に対して $[u, Jv] \in \nu\boldsymbol{R}$ だから，

$$[u, Jv] = e^{\theta J}[u, Jv] = \rho_{\exp i\theta}[u, Jv]$$

であるが，$\rho_{\exp i\theta}$ は ν-同形写像だから，$\theta = \pi/2$ として，

$$[u, Jv] = [\rho_{\exp \pi/2}u, \rho_{\exp \pi/2}Jv] = [Ju, J^2v] = -[Ju, v] = [v, Ju]$$

となり，$\dfrac{1}{\nu}[u, Jv]$ が対称であることがわかる．さらにこれより，$w, w' \in \boldsymbol{W}_p(1)^{\boldsymbol{C}}$

---

*) 無論このようにおかなくても良いが，そうすると証明法を少し変えなければならなくなる．どうおいても結論は同じである．

に対しては，$\frac{1}{\nu}[w, J\bar{w}']$ はエルミート形式，

$$\frac{1}{\nu}[w, J\bar{w}'] = \frac{1}{\nu}[w', J\bar{w}] \qquad (\text{ー は複素共役})$$

であることもわかる．

$\boldsymbol{W}_p(1)^C$ を J の固有空間に分解し，$V_p^{(i)} \oplus V_p^{(-i)}$ とすれば，$\bar{J}=J$ だから，$\bar{V}_p^{(i)} = V_p^{(-i)}$ となる．$[V_p^{(i)}, V_p^{(i)}]$ は J の $2i$-固有空間に属さねばならないが，固有値は $\pm i$ だけだから，

$$[V_p^{(i)}, V_p^{(i)}] = \{0\} \qquad (\text{同様，} [V_p^{(-i)}, V_p^{(-i)}] = \{0\})$$

もわかる．$V_p^{(i)}$ の基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をエルミート形式 $\frac{1}{\nu}[w, J\bar{w}']$ が対角化され規格化されるように，つまり $\frac{1}{\nu}[\boldsymbol{e}_j, J\bar{\boldsymbol{e}}_k] = \varepsilon_j \delta_{jk}$ となるように選び，$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r = 1$，$\varepsilon_{r+1} = \cdots = \varepsilon_n = -1$ とする．

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j + \bar{\boldsymbol{e}}_j), \qquad Y_j = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{e}_j - \bar{\boldsymbol{e}}_j) \qquad (1 \leqq j \leqq r)$$

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{e}_k - \bar{\boldsymbol{e}}_k), \qquad Y_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_k + \bar{\boldsymbol{e}}_k) \qquad (r+1 \leqq k \leqq n)$$

とおけば，$X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$ は $\boldsymbol{W}_p(1)$ の基底となり，$JX_j = -Y_j$，$JY_j = X_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ となる．容易な計算で

$$\frac{1}{\nu}[X_j, JX_k] = \frac{1}{\nu}[Y_j, JY_k] = \delta_{jk}, \qquad \frac{1}{\nu}[X_j, JY_k] = \frac{1}{\nu}[Y_j, JX_k] = 0$$

がわかるから，$\frac{1}{\nu}[u, Ju]$ が正定値であることがわかる．　□

次に，T^*M と $\boldsymbol{W}_M(1)$ とを自然に同一視することを考えよう．$\boldsymbol{W}_M$ はワイル多様体だから，各 $p \in M$ に対して p の近傍 V_p と，ワイル座標関数 $\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{V_p})$ が存在するが，これは V_p 上の正準座標系（$\{\ ,\ \}$ に関する局所標準座標系）$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ に対して，ワイル接続を行って得られているとして良い．つまり $x_i{}^\# = \xi_i$，$y_i{}^\# = \eta_i$ として良い．そこで，π_1：$\boldsymbol{W}_p \to \boldsymbol{W}_p(1)$ を射影とし，$dx_i|_p$，$dy_i|_p$ と $\pi_1\xi_i(p)$，$\pi_1\eta_i(p)$

とを対応させて，$T_p{}^*M$ と $\boldsymbol{W}_p(1)$ とを同一視することにする．つまり，

$$T_p{}^*M \ni df(p) \leftrightarrow \pi_1(f^\#(p)) \in \boldsymbol{W}_p(1)$$

の同一視を行うのである．容易に，$\pi_1 f^\# \equiv 0$ ならば $f^\# \equiv c \bmod \nu$ がわかるから上の同一視は自然なものである．また，この同一視のしかたから，$\boldsymbol{W}_M$ 上で 1 次微分形式をどのように考えれば良いのかということも自然にわかる．

上の同一視の下では J は M 上の (1, 1) テンソル場で $J^2 = -1$ となるものと理解されるから，M は概複素多様体*) となる．さらに，

$$G(p)(u, v) = \frac{1}{\nu}[u, Jv]$$

と定義すれば，G は T^*M に内積を定義する．これは，

$$G(p)(Ju, Jv) = G(p)(u, v)$$

をみたすことが容易にわかる．つまり，G は M 上のエルミート計量**) である．

調和振動子場は次数作用素場と一緒になって M 上にエルミート計量を定義するのであるが，これらのものはワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ とは無関係に与えられているので，$\rho_{\exp i\theta}\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M) = \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)$ といった性質は一般には期待できない．ワイル関数と調和振動子場との間にどのような関係が設定できるかについては後で考察の対象にする．

9° 二種類の接続

記号と仮定は前節のままとし，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上に調和振動子場 ρ と，次数作用素場 $\tilde{D}_0$ が，$\rho_{\exp i\theta}\tilde{D}_0 = \tilde{D}_0\rho_{\exp i\theta}$ をみたすように与えられているとしよう．$\tilde{D}_0$ に関して $\boldsymbol{W}_M$ は

---

*，**） 詳しい定義や性質については，Kobayashi-Nomizu, Foundation of Differential Geometry II, Interscience, 1969, IX 章参照．

$$\boldsymbol{W}_M=\prod_{l=0}^{\infty}\boldsymbol{W}_M(l),\qquad \boldsymbol{W}_M(l)=\bigcup_{p\in M}\boldsymbol{W}_p(l)$$

と固有空間分解される．各点 $p\in M$ では $\boldsymbol{W}_p=\prod_{l=0}^{\infty}\boldsymbol{W}_p(l)$ と固有空間分解されている訳であるが，各 $\boldsymbol{W}_p(l)$ は $\rho_{\exp i\theta}$-不変であり，$\boldsymbol{W}_M(1)$ は M の余接バンドル T^*M と同形であり，前節の G は $\boldsymbol{W}_M(1)$ に内積を与えている．これらの構造を使って M 上に2種類の接続（共変微分）を定義しよう．

（**A**）　まず M 上のアフィン接続と呼ばれているものの考え方を説明しよう．接続を与えるということは第 I 部でもやったように，曲線に沿って接ベクトルの平行移動のしかたを与えることである．そういうものが与えられたとして，曲線 $c(t)$ に沿って $Y\in T_{c(t)}M$ を $p=c(0)$ の所まで平行移動したものを $\tau_{c(t)}Y$ と書く．$\tau_{c(t)}$ は $T_{c(t)}M$ から T_pM の上への線形同形写像と考える．各 t に対して接ベクトル $Y(t)\in T_{c(t)}M$ が与えられているとき，$t=0$ での $Y(\cdot)$ の共変微分とは，

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{t=0}Y(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\tau_{c(h)}Y(h)-Y(0)\}\ ^{*)}$$

のことである．$X=\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}c(t)$ のとき，この微分は X にしか依存しないと考えれば，$\left.\dfrac{\nabla}{dt}\right|_{t=0}$ を ∇_X と書いても良い．この共変微分を具体的に書くには，局所座標系 $(x^1,\cdots,x^m)$ を使って，$Y(t)=\partial/\partial x^i|_{c(t)}$ のときの $\nabla_X\partial/\partial x^i$ を知ればあとは通常の微分の規則で計算できる．さらに，方向微分の性質を思い出して $\nabla_X\partial/\partial x^i$ が $X\in T_pM$ に関して線形であるとすれば，共変微分の計算のために我々が知らなければならないのは，$\nabla_{\partial/\partial x^i|_p}\partial/\partial x^j$ だけであることがわかる．これを

$$\nabla_{\partial/\partial x^i|_p}\partial/\partial x^j=\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{i\,j}^{\,k}(p)\,\partial/\partial x^k|_p$$

と書き，$\Gamma_{i\,j}^{\,k}(p)$ を **接続 ∇ の係数** と呼ぶ．別の座標系に関しても同様にして

＊）　第 I 部 1章 **4°** 参照．

$\acute{\Gamma}_{\alpha\ \beta}^{\ \gamma}$ という接続の係数がきまるが，接続の係数の座標変換則には座標系の 2 階微分が入ってくることを注意しておけば良い．

上のようにして Γ_{jk}^{i} を各座標系ごとに与えて定義される接続を **アフィン接続** と呼ぶ．さらに，

$$T = \sum_{i,j,k}\left(\Gamma_{k\ j}^{\ i} - \Gamma_{k\ j}^{\ i}\right)dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

を接続 ∇ の **捩率テンソル** と呼ぶが，以下では $T=0$，つまり $\Gamma_{j\ k}^{\ i} = \Gamma_{k\ j}^{\ i}$ をみたすアフィン接続のみを考える．

上の共変微分は接ベクトル場に対して定義されていたが共変微分がひとたび設定されてしまうと，すべてのテンソル場に対して共変微分が定義できる．$\nabla_{\partial/\partial x^i} dx^j$ を知るには，まず，$dx^j\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j$ だから，∇ にライプニッツ規則をあてはめて $\nabla_{\partial/\partial x^k}\delta_i^j = 0$ を用いると，

$$(\nabla_{\partial/\partial x^k} dx^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + dx^j\left(\sum \Gamma_{k\ i}^{\ l}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = 0$$

より，

$$\nabla_{\partial/\partial x^k} dx^j = -\sum_l \Gamma_{k\ l}^{\ j}\, dx^l$$

でなければならない．普通の関数 f に対しては，$\nabla_{\partial/\partial x^k} f = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ でなければならないから，結局ライプニッツ規則が成立するものとすればどんな 1 次微分形式（コベクトル場）についても共変微分が計算できる．同じことで，(r, s) 型のテンソル場は，$\sum \tau_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{j_s}}$ と書けるのだから，やはりライプニッツ規則だけから計算できる．

前節で与えた G は $\boldsymbol{W}_M(1)$ に内積を定義したが，$\boldsymbol{W}_M(1)$ と T^*M とを同一視すれば，T^*M に内積が与えられたと思って良く，局所座標系で書けば，

$$G = \sum_{i,j} g^{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^i}\circledcirc\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (\circledcirc \text{は対称テンソル積})$$

と書ける．

定理 1 M 上のアフィン接続 ∇ が捩率テンソルが 0 で，かつ $\nabla G = 0$ を

みたすならば，接続の係数 $\Gamma_{ij}^{\ k}$ はクリストッフェル $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ で与えられる．逆に $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ を使えば M にアフィン接続が与えられる．これを G からきまる **計量接続** と呼ぶ．

証明　$\nabla_{\partial/\partial x^k} G = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,l} g^{ij} \Gamma_{k\ i}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$+ \sum_{i,j,l} g^{ij} \Gamma_{k\ j}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

だから，$=0$ とおき，$g^{ij} = g^{ji}$ を使うと，

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g^{lj} + \sum_a g^{aj} \left(\Gamma_{k\ a}^{\ l} + \Gamma_{a\ k}^{\ l} \right) = 0$$

を得る．(g_{ij}) を (g^{ja}) の逆行列とすると，容易に

$$\Gamma_{k\ i}^{\ l} + \Gamma_{i\ k}^{\ l} = \sum_j g^{lj} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}$$

が得られるから，この後は第 I 部でやったようにして $\Gamma_{ij}^{\ k} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$ が得られる．後半も第 I 部の結果から明らかであろう．　□

上の接続を以下では ∇^G と書くことにする．G は ∇^G に関しては定数のごとくふるまうという訳であるが，前節で定義した $(1, 1)$ テンソル $J = \sum J_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ については $\nabla^G J = 0$ であるとは限らない．

(B)　次にアフィン接続に対するもう1つの見方を説明しよう．第1章 **3°** で無限小部分の代数として $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ を定義したが，$\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ の元はある C^∞ 級関数の p でのテイラー展開 $\tau_p(f)$ であった．$\Phi_{\nu,p}^{(n)}$ を点 p における $\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]$-値関数の **ジェット空間** と呼び，$\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ を **ジェット束** と呼ぶ．

ところで，2章 **9°** 定理2によれば，$\boldsymbol{W}_p$ と $(\Phi_{\nu,p}^{(n)}, *)$ とは同一視できる．一方 $\boldsymbol{W}_M = \prod_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{W}_M(l)$ と分解されていたから，これはジェット束 $\Phi_{\nu,M}^{(n)}$ の分解が与えられたと考えることができる．そこで上の分解をもう少し詳しく見ると，

$$\boldsymbol{W}_p(2)=\boldsymbol{W}_p(1)\odot\boldsymbol{W}_p(1)\oplus\nu\boldsymbol{R}\,,$$
$$\boldsymbol{W}_p(3)=\boldsymbol{W}_p(1)\odot\boldsymbol{W}_p(1)\odot\boldsymbol{W}_p(1)\oplus\nu\boldsymbol{W}_p(1)$$

等と各 $\boldsymbol{W}_p(l)$ がさらに分解されていることがわかる．ただし，$\odot$ の意味は次のようなものである： $\hat{Z}_1, \cdots, \hat{Z}_{2n}$ を $\boldsymbol{W}_p(1)$ の任意の基底とすると，$[[\hat{Z}_i, \hat{Z}_j], \boldsymbol{W}_p]=\{0\}$ だから，1 章 **4°** の (9) ～ (12) でやったようにして $\odot$-積が定義できる．上の $\odot$ はこのようにして作った $\odot$-積によるものである．

$\odot$-積は可換で結合的だから，$\hat{Z}_{i_1}\odot\hat{Z}_{i_2}\odot\cdots\odot\hat{Z}_{i_k}$ と対称テンソル積 $\hat{Z}_{i_1}\otimes\hat{Z}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\hat{Z}_{i_k}$ とを同一視し，$S^k(\boldsymbol{W}_p(1))$ を $\boldsymbol{W}_p(1)$ の k 階の対称テンソル積とすれば，$l=\left[\dfrac{k}{2}\right]$ として，

$$\boldsymbol{W}_p(k)=S^k(\boldsymbol{W}_p(1))\oplus\nu S^{k-2}(\boldsymbol{W}_p(1))\oplus\cdots\oplus\nu^l S^{k-2l}(\boldsymbol{W}_p(1))$$

が得られる．$\boldsymbol{W}_p(1)$ と $T_p{}^*M$ とを同一視*)すれば，$S^m(\boldsymbol{W}_p(1))$ は $(m, 0)$ 対称テンソルの空間と思えるから，上の分解は，$\boldsymbol{\Phi}^{(n)}_{\nu,M}$ を対称テンソルの空間 $\prod_{l=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\nu^l S^k(T^*M)$ に分解したことを意味する．別の言葉で言えば，次数作用素の場，調和振動子の場は，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ の $*$-積を対称テンソルの空間

$$S_\nu(T^*M)=\prod_{l=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\nu^l S^k(T^*M)$$

に持込んでいることになるのである．

さて，$\boldsymbol{\Phi}^{(n)}_p$ は関数の p におけるテイラー展開 $\tau_p(f)$ の全体であったが，このテイラー展開を 2 次で打ち切ったものを $j_p{}^2f$ と書き，f の p における 2-**ジェット** と呼ぶ．$j_p{}^2f$ の全体を $J_p{}^21_M$ と書き 2-**ジェット空間** と呼ぶ．$\boldsymbol{\Phi}^{(n)}_{\nu,p}$ と $\boldsymbol{W}_p$ とを同一視しておくと，2 次で打切るということは $\boldsymbol{W}_p/\boldsymbol{W}_{p,(2)}$ で考えるということだから，$J_p{}^21_M$ は自然に $\boldsymbol{W}_p/\boldsymbol{W}_{p,(2)}$ の中に埋込まれているとして良い．一方，上の分解を使えば，

$$\boldsymbol{W}_p/\boldsymbol{W}_{p,(2)}\cong\boldsymbol{R}\oplus T_p{}^*M\oplus\nu\boldsymbol{R}\oplus S^2(T_p{}^*M)$$

となり，$J_p{}^21_M\cong\boldsymbol{R}\oplus T_p{}^*M\oplus S^2(T_p{}^*M)$ となる．右辺は $j_p{}^2f$ の 0 次，1

*) この同一視は一度固定したら勝手に変えて考えてはいけない．

次，2次 の項にそれぞれ対応しているが，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ のようなものは座標変換のされ方が違うからそのままではテンソルと思うことはできない．しかし，上のように，いつも次数作用素の固有空間に分解して考えるならばテンソルと思うことができる．

アフィン接続とは，$J_p^{(2)}1_M$ を $\boldsymbol{R} \oplus T_p{}^*M \oplus S^2(T_p{}^*M)$ と分解するしかたのことである．π を $J_p^{(2)}1_M$ から $S^2(T_p{}^*M)$ への射影とする．関数 f に対して，df はコベクトル場と思うことができるが，df の点 p における **共変全微分** $(\nabla df)(p)$ を

$$(\nabla df)(p) = \pi j_p{}^2 f$$

で定義する．局所座標系 $x^1, \cdots, x^{2n}$ を用いて $S^2(T_p{}^*M)$ の基底を $dx^i \circledS dx^j\ (= dx^j \circledS dx^i)$ と書き，

$$\nabla \partial/\partial x^2 dx^i(p) = -\sum_{j,k} \Gamma_j{}^i{}_k(p)\, dx^j \circledS dx^k$$

と書き，$\Gamma_j{}^i{}_k(p)$ を接続 ∇ の係数と呼ぶ．$\Gamma_j{}^i{}_k = \Gamma_k{}^i{}_j$ である．$\nabla_{\partial/\partial x^l} dx^i$ を求めるには $dx^j\left(\dfrac{\partial}{\partial x^l}\right) = \delta^j_l$ を使って

$$\nabla_{\partial/\partial x^l} dx^i = -\sum_k \Gamma_l{}^i{}_k dx^k$$

とすれば良い．ここから先の計算のしかたは ∇^G の場合と全く同様である．

上のようにして定義した接続は主に次数作用素による固有空間分解に関係していて G にはあまり関係がないから，一般に $\nabla G \neq 0$ である．しかし，$\tilde{D}_0$ が微分であったことを反映して，次のことが成立する（証明は略す）：

定理 2　$*$-積が定義するポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ を双線形微分作用素，$\{\ ,\ \} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ *) と見ると，$\nabla\{\ ,\ \} = 0$ である．ただし，$\Omega^{ij} = \{x^i, x^j\}$ である．

(C)　G と $\{\ ,\ \}$ との関係をもう少し詳しく調べよう．M の任意の局所座

*)　$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$（反対称テンソル積）

標系 $x^1, \cdots, x^{2n}$ に対し，dx^i をコベクトル場と見ると，

$$\Omega^{ij}(p) = \{x^i, x^j\}_p = \{dx^i, dx^j\}_p = -\frac{1}{\nu}[dx^i, dx^j](p)$$

と考えて良かった．{ , }に関するヤコビ恒等式より容易に

$$(1) \qquad \sum_a\left(\Omega^{ia}\frac{\partial}{\partial x^a}\Omega^{jk} + \Omega^{ja}\frac{\partial}{\partial x^a}\Omega^{ki} + \Omega^{ka}\frac{\partial}{\partial x^a}\Omega^{ij}\right) = 0$$

を得る．ただし i, j, k は任意である．

一方，$g^{ij}(p) = G(p)(dx^i, dx^j)$ とすれば G 自身は対称な双線形微分作用素 $G = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$ と思うことができる．(g^{ij}) の逆行列を (g_{ij}) とし，$G^{-1} = \sum_{i,j} g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ とすれば，これは M の接バンドル TM に内積を定義する．**3°** の (**C**) で測地線を使って指数写像 Exp となるものを定義したが，上の G^{-1} を使って Exp を作ると，Exp_p は T_pM の 0 の近傍 V_p から，M における p の近傍 U_p への C^∞ 同相写像となる．そこで，T_pM の元 X を $X = \sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ と書き，$(X^1, \cdots, X^m)$ を点 $\mathrm{Exp}_p X$ の座標と考えることにする．この座標系を p での測地座標系と呼ぶ．測地座標系は次のような性質を持っている：

補題 $X^1, \cdots, X^m$ を点 $p \in M$ における測地座標系とし，これに関して $G^{-1} = \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{X})dX^i \otimes dX^j$ と成分表示をすると，任意の i, j, k について，次が成立する：

$$\frac{\partial}{\partial X^k}g_{ij}(\boldsymbol{X})|_p = 0$$

証明 $X^1, \cdots, X^m$ で表わしたクリストッフェル記号を $\left\{{k \atop ij}\right\}$ とすると，測地座標系だという性質から $\left\{{k \atop ij}\right\}(p) = 0$，したがって $[ij, k](p) = 0$ がわかる．これより，上のことが得られる． □

さて，G^{-1} を用いて{ , }から M 上の 2 次微分形式 Ω を

$$(2) \qquad \Omega = \sum_{i,j,a,b} g_{ia}g_{jb}\Omega^{ab}dx^i \wedge dx^j$$

で定義する．これは，$\{\ ,\ \} = \sum_{ij} \Omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ を，$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_a g_{ia} dx^a$ を用いて書き直しただけのものである．

定理 3 Ω は M 上の閉微分形式である．(i.e. $d\Omega = 0$ である．)

証明 外微分の計算は $\Omega = \sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ に対しては，$d\Omega = \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Omega_{ij} \right) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$ とすれば良いのだが，この式は未整理だから $\Omega_{ii} = -\Omega_{ji}$ を用いて整理して

$$d\Omega = \sum_{i<j<k} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Omega_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} \Omega_{ki} + \frac{\partial}{\partial x^k} \Omega_{ij} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

の形にしなければいけない．しかし計算を行うときは未整理のまま行い，最後に整理するのが良い．

局所座標系は何を用いても良いから，p での測地座標系を用いて p での値を調べよう．測地座標系での G^{-1}, $\{\ ,\ \}$ の成分をそれぞれ $\tilde{g}_{ij}$, Ω^{ij} とすれば，$\Omega = \sum_{i,j,a,b} \tilde{g}_{ia}\, \tilde{g}_{jb} \widetilde{\Omega}^{ab}\, dX^i \wedge dX^j$ だから，前補題を使うと，

$$(d\Omega)(p) = \sum_{i,j,k,a,b} \tilde{g}_{ia}(p)\, \tilde{g}_{jb}(p) \frac{\partial \widetilde{\Omega}^{ab}}{\partial X^k}(p)\, dX^k \wedge dX^i \wedge dX^j \Big|_p$$

となる．これに，$dX^i = \sum_l \tilde{g}^{il} \frac{\partial}{\partial X^l}$ という関係を代入し，さらに，$G(u, v) = -\{u, Jv\}$ から簡単に求まる関係

$$\tilde{g}^{ij}(p) = -\sum_a \widetilde{\Omega}^{ia}(p) J_a{}^j(p) \qquad \left(ただし\ J = \sum_{a,b} J_a{}^b\, dX^a \otimes \frac{\partial}{\partial X^b} \right)$$

を代入すると，

$$(d\Omega)(p) = -\sum_{i,j,k,a,b} J_a{}^i\, \widetilde{\Omega}^{ab} \frac{\partial \widetilde{\Omega}^{jk}}{\partial X^b} \frac{\partial}{\partial X^i} \wedge \frac{\partial}{\partial X^j} \wedge \frac{\partial}{\partial X^k} \Big|_p$$

となる．

そこで，T_pM の座標系 $X^1, \cdots, X^{2n}$ を選ぶときに，初めから

$$\sum_{i=1}^{2n} J_a{}^i \frac{\partial}{\partial X^i} = \pm \frac{\partial}{\partial X^a} \qquad (符号は番号\ a\ で定まる．)$$

が成り立つように選んでおく．これは $J^2 = -1$ だから可能である．このようにしておくと，

$$(d\Omega)(p) = \pm \sum \tilde{\Omega}^{ab} \frac{\partial \tilde{\Omega}^{jk}}{\partial X^b} \frac{\partial}{\partial X^a} \wedge \frac{\partial}{\partial X^j} \wedge \frac{\partial}{\partial X^k}$$

となるが，これも未整理だから $\tilde{\Omega}^{jk} = -\Omega^{kj}$ を用いて整理すると，(1) と同じ形が現れ，結局 $(d\Omega)(p) = 0$ を得る． □

10° ケーラー・ワイル多様体

前節の (**B**) で定義された接続を ∇^G と区別して ∇^Ω と書こう．この節ではまず，$\nabla^G = \nabla^\Omega$ となるのはどういう場合かを調べよう．まず次の補題が成立する：

補題 1 $\nabla^G = \nabla^\Omega$ となる必要十分条件は $\nabla^\Omega J = 0$ である．

証明 u, v をコベクトル場とし，各点 $p \in M$ で $u(p)$ を $\boldsymbol{W}_p(1)$ の元と同一視すると，$\{u, v\}(p) = -\dfrac{1}{\nu}[u(p), v(p)]$ である．$\nabla^G G = 0$ だから，$\nabla^G G(u, v) = G(\nabla^G u, v) + G(u, \nabla^G v)$ であり，したがって

$$\nabla^G[u, Jv] = [\nabla^G u, Jv] + [u, J\nabla^\Omega v]$$

となる．一方 $\nabla^\Omega\{\ ,\ \} = 0$ だから次が得られる：

$$\nabla^\Omega[u, Jv] = [\nabla^\Omega u, Jv] + [u, (\nabla^\Omega J)v] + [u, J\nabla^\Omega v]$$

$\nabla^G = \nabla^\Omega$ ならば，上の 2 つから，任意の u, v について $[u, (\nabla^\Omega J)v] = 0$ が得られ，これより $\nabla^\Omega J = 0$ を得る．

逆に $\nabla^\Omega J = 0$ ならば，第 2 の式より $\nabla^\Omega G = 0$ を得るが，∇^Ω の捩率テンソルは 0 だったから定理 1 により $\nabla^\Omega = \nabla^G$ であることがわかる． □

ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上に調和振動子場と次数作用素場が与えられて，これからきまる ∇^G と ∇^Ω とが一致したとすると，概複素構造 J がエルミート計量 G からきまる接続 ∇^G に関して平行であるというのが前補題の結論であるが，微分幾何学ではこのような M のことを **ケーラー多様体** と呼んでいる．これは複素構造を持った特殊なリーマン多様体であるので少し解説を加えて

おこう.

$2n$ 次元の C^∞ 多様体 M 上に $J^2=-1$ となるような $(1,1)$ テンソル場が定義されているとき，(M, J) を概複素多様体と呼ぶことは前にも述べた. 局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{2n})$ を使えば，J は

$$J=\sum_{i,j} J_i^j(\boldsymbol{x})\, dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と成分表示されるが，各点 $p \in M$ の近傍で上手に局所座標系を選んで J_i^j が全部，定数関数となるようにできるとき，(M, J) を **複素多様体** と呼ぶ. $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ をそのようなうまい局所座標系とすれば，$x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$ に適当に線形変換を行って，

$$J(dx^i)=-dy^i, \qquad J(dy^i)=dx^i \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

となるようにできるから，このようなものを p の近傍での **複素座標系**と呼んでおこう. 複素座標系は正準座標系 ($\{\ ,\ \}$ に関する局所標準座標系) に似てはいるが，一般に $\{x^i, y^j\}=c^{ij}$ (定数) とはならないから混同しないように注意しておく必要がある.

複素座標系 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ があれば，

$$z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i, \qquad dz^i=dx^i+\sqrt{-1}\,dy^i \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

とおいてやると，$J\,dz^i=\sqrt{-1}\,dz^i$ となって，J で変換することが複素定数 $\sqrt{-1}$ をかけることと同じことになる. そこで $(z^1, \cdots, z^n)$ のことも 複素座標系 と呼ぶことにしよう.

補題 2 (M, J) が上の意味で複素多様体ならば，複素座標系どうしの座標変換は複素数関数の意味で正則である*⁾.

証明 $(\hat{x}^1, \cdots, \hat{x}^n, \hat{y}^1, \cdots, \hat{y}^n)$ を別の複素座標系とし，$\hat{z}^i=\hat{x}^i+\sqrt{-1}\,\hat{y}^i$ とする. 複素座標系で J を成分表示すれば

$$J=\sum_{i,j=1}^{n} \delta_i^j \left(d\hat{x}^i \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{y}_j} - d\hat{y}^i \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \right)$$

*⁾ 普通はこれを複素多様体の定義に採用している.

であることに注意して座標変換を行ってみると，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \acute{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \acute{y}}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \acute{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial \acute{y}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I \\ \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \acute{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \acute{x}} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \acute{y}} & \dfrac{\partial y}{\partial \acute{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ \\ -I & O \end{bmatrix}^{*)}$$

の形に書ける関係式が得られる．左辺の右側の行列は左端の行列の逆行列であることに注意して計算すれば，

$$\frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \acute{y}^i}{\partial y^j}, \qquad \frac{\partial \acute{y}^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial \acute{x}^i}{\partial y^j} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

という関係が得られる．これは，$\acute{x}^i$, $\acute{y}^i$ がコーシー・リーマンの微分方程式をみたしているということだから，$\acute{z}^i$ が $z^1, \cdots, z^n$ の関数と見たとき正則であることを意味する． □

証明は省略したが，ケーラー多様体（$\nabla^G = \nabla^\Omega$ である多様体）は複素多様体であるから，各点の近傍で局所座標系（$x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$）をうまく選ぶと，それに関して J は

$$J = \sum_{i=1}^n \left(dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

と表示されるようにできる．一方，ケーラー多様体はシンプレクティック多様体でもあるから，ダルブーの定理を使って各点の近傍で局所座標系（$\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$）を選んで

$$\{\ ,\ \} = \sum_{i=1}^n \partial_{\tilde{x}_i} \wedge \partial_{\tilde{y}_i} \ \left(= \sum_{i=1}^n (\partial_{\tilde{x}_i} \otimes \partial_{\tilde{y}_i} - \partial_{\tilde{y}_i} \otimes \partial_{\tilde{x}_i}) \right)$$

となるようにできる．一般に，$\tilde{x}_i = x^i$, $\tilde{y}_i = y^i$ とすることはできないが，点 p を固定すれば $\tilde{x}_i(p) = x^i(p)$, $\tilde{y}_i(p) = y^i(p)$ で，$\dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x^j}(p) = \dfrac{\partial \tilde{y}_i}{\partial y^j}(p) = \delta^i_j$, $\dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y^j}(p) = \dfrac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x^j}(p) = 0$ となるように（$x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$），（$\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$）を選ぶことはできる．

さて，上の話は底空間 M 上の話だったから，これをいわば量子化してケー

---

*) 省略した書き方だが，計算してみれば何のことか了解できる．

ラー・ワイル多様体なるものを定義しよう．

各点で階数が $2n$ であるようなワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ 上に調和振動子場 $\rho_{\exp i\theta}$ と，次数作用素場 $\tilde{D}_0$ が互いに可換となるように与えられているとして，これからきまる2種類の接続を ∇^G, ∇^Ω としよう．次のように定義する．

定義1　$\nabla^G=\nabla^\Omega$ が成立するとき $\boldsymbol{W}_M$ を**ケーラー・ワイル多様体**と呼ぶ．

$\tilde{D}_0$ による $\boldsymbol{W}_M$ の固有空間分解を $\prod_{k=0}^{\infty} W_M(k)$ とし，これをさらに**9°**，(**B**) でやったように

$$\boldsymbol{W}_M=\prod_{l=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\nu^l S^k(\boldsymbol{W}_M(1))=\prod_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]\otimes S^k(\boldsymbol{W}_M(1))$$

と分解する．記号を簡略化するために以下では

$$S_\nu^k(\boldsymbol{W}_M(1))=\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]\otimes S^k(\boldsymbol{W}_M(1)),$$
$$S_\nu^k(\boldsymbol{W}_M(1))^C=\boldsymbol{C}[\![\nu]\!]\otimes S^k(\boldsymbol{W}_M(1))$$

等と書くことにする．$\boldsymbol{W}_M^C=\prod_{k=0}^{\infty}S_\nu^k(\boldsymbol{W}_N(1))^C$ であるが，$\boldsymbol{W}_M^C$ から，$S_\nu^k(\boldsymbol{W}_M(1))^C$ への射影を $\tilde{\pi}_k$ と書くことにする．

$\boldsymbol{W}_M$ はワイル多様体であるから各点 $p\,(\in M)$ の近傍 U で，局所座標系 $\boldsymbol{\Phi}:\ \boldsymbol{W}_U\to\boldsymbol{W}_{U'}\ (U'\subset\boldsymbol{R}^{2n})$ が存在している．この局所座標系を使って定義されるワイル接続を # と書くことにしよう．

$\boldsymbol{W}_M$ がケーラー・ワイル多様体であれば，M は複素多様体であるから，p の近傍 U 上に複素座標関数 $x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n$ が定義されていると思って良いから，

$$\xi_i=(x^i)^\#,\qquad \eta_i=(y^i)^\#\qquad (1\leqq i\leqq n)$$

と定義する．まず次の補題が簡単に得られる：

補題3　任意の $f\in C_\nu^\infty(U)$ に対して，任意の $q\in U$ で

$$\tilde{\pi}_1 f^\#(q)=\sum_{i=1}^{n}(\partial_{x^i}f(q)\,\tilde{\pi}_1\xi_i(q)+\partial_{y^i}f(q)\,\tilde{\pi}_1\eta_i(q))$$

これを用いて次の定理が示される：

定理 1 $\boldsymbol{W}_M$ がケーラー・ワイル多様体のとき，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C$ 内で

$$\zeta_j = \xi_j + \sqrt{-1}\,\eta_j, \qquad \bar{\zeta}_j = \xi_j - \sqrt{-1}\,\eta_j \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

とすれば，$[\zeta_i, \zeta_j] = [\bar{\zeta}_i, \bar{\zeta}_j] = 0$ が成立する．（しかし一般に $[\zeta_i, \bar{\zeta}_j]$ は定数ではない．）

証明 x_i, y_i は ν を含まないから，$\tilde{\pi}_1\xi_i = \pi_1\xi_i$，$\tilde{\pi}_1\eta_i = \pi_1\eta_i$ に注意する．$\pi_1\xi_i$，$\pi_1\eta_i$ は dx_i, dy_i と同一視されるものであったから，各 $q \in U$ で，$\tilde{J}\,\tilde{\pi}_1\xi_i(q) = -\tilde{\pi}_1\,\eta_i(q)$，$\tilde{J}\,\tilde{\pi}_1\eta_i(q) = \tilde{\pi}_1\xi_i(q)$ が成立している．$\dfrac{1}{\nu}[S^k_\nu(\boldsymbol{W}_p(1))^C, S^l_\nu(\boldsymbol{W}_p(1))^C] \subset S^{k+l-2}_\nu(\boldsymbol{W}_p(1))^C$ であるから，$\zeta_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\pi}_k\zeta_j$ とおくと，

$$\tilde{\pi}_0\left(\frac{1}{\nu}[\zeta_i, \zeta_j]\right) = \frac{1}{\nu}[\pi_1\zeta_i, \pi_1\zeta_j]$$

が成立する．ところが $[\pi_1\zeta_i, \pi_1\zeta_j]$ は J の $2\sqrt{-1}$ 固有空間に属してしまうために 0 となり，$\tilde{\pi}_0\left(\dfrac{1}{\nu}[\zeta_i, \zeta_j]\right) \equiv 0$ を得る．ところが，$\dfrac{1}{\nu}[\zeta_i, \zeta_j] \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C$ であり，$f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C$ で，恒等的に $\tilde{\pi}_0 f = 0$ となるものは $f \equiv 0$ に限るから，これで $[\zeta_i, \zeta_j] = 0$ が示せた．さらに $\overline{[f, g]} = [\bar{g}, \bar{f}]$ だから $[\bar{\zeta}_j, \bar{\zeta}_i] = 0$ も言える．□

上の $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ はワイル局所座標系ではないが，多項式近似定理と C^∞ 位相に関する議論を経由すれば，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)$ の任意の元が $\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n$ の関数として書けること，さらに，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_U)^C$ の任意の元が $\zeta_1, \cdots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n$ の関数として書けることなどは明らかであろう．

上の定理の証明を細かく見ると，$\tilde{\pi}_1\xi_i = \pi_1\xi_i$ などの性質は不要で，単に $\tilde{J}\,\tilde{\pi}_1\xi_i = -\tilde{\pi}_1\eta_i$，$\tilde{J}\,\tilde{\pi}_1\eta_i = \tilde{\pi}_1\xi_i$ となっておれば，$\dfrac{1}{\nu}[\tilde{\pi}_1\zeta_i, \tilde{\pi}_1\zeta_j](q)$ が $\tilde{J}$ の $2\sqrt{-1}$ 固有空間に属する $S^0_\nu(\boldsymbol{W}_q(1))^C = \boldsymbol{C}[\![\nu]\!]$ の元であることより 0 となることを使って，$[\zeta_i, \zeta_j] = 0$ が言えることがわかる．

そこで，上のような $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ または $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ のことを $\boldsymbol{W}_M$ 上の（量子化された）**複素座標系** と呼ぶことにしよう．すると，補題 2 に対応して次のことが言える：

定理2 ケーラー・ワイル多様体 W_M 上で2つの複素座標系 $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, $(\zeta_1', \cdots, \zeta_n')$ の間の座標変換を考えれば, ζ_i' が $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ のみの関数として表示され $\bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n$ を含まないという意味において正則となる.

証明 $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, $(\zeta_1', \cdots, \zeta_n')$ を共通の W_U 上で定義された複素座標系とする. これとは別に U 上には正準座標系 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$ が定義されていると思って良い. ζ_i, ζ_i' などは $\mathcal{F}(W_U)^C$ の元であるから, $z_i, z_i' \in C_\nu^\infty(U)^C$ ($= C \otimes C_\nu^\infty(U)$) なる元があってそれのワイル接続 $z_i^\#, z_i'^\#$ として書けている. そこで, 補題3を使って, 補題2と同様に計算すると各 z_i' は $(z_1, \cdots, z_n)$ の正則関数であることがわかる. つまり, $\zeta_i' = z_i'(z)^\#$ と書けるのであるが, $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$ の方から定義される⊙-積を使うと, 1章 **5°** の定理2により # は⊙-積に関しては同形写像なのだから, ζ_i' が $\zeta_i = z_i^\#$ のみの関数として書けていることがわかる. これは, 上の⊙-積を使った関数の表示では $\bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n$ が入ってこないことを意味するが, 使う⊙-積は正準座標系から作ったものであれば何でも良い. □

上の定理では「正則なワイル関数」というものの定義が少しぼやけているので, これの定義を確定させておこう.

ケーラー・ワイル多様体 W_M に対し, 任意の $p \in M$ を原点として正準座標系 ($\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$) と複素座標系 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ を $\dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x^j}(p) = \dfrac{\partial \tilde{y}_i}{\partial y^j}(p) = \delta_j^i$, $\dfrac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x^j}(p) = \dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y^j}(p) = 0$ となるように選ぶ. ($\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$)を使って定義されるワイル接続を $\#_p$, ⊙-積を $\odot_p$ と書くことにしよう. そして, $\xi_i = (x^i)^{\#_p}$, $\eta_i = (y^i)^{\#_p}$, $\zeta_i = \xi_i + \sqrt{-1}\,\eta_i$ とする. さらに $\tilde{x}_i^{\#_p}(p) = \tilde{X}_i$, $\tilde{y}_i^{\#_p}(p) = \tilde{Y}_i$ とし, $\tilde{Z}_i = \tilde{X}_i + \sqrt{-1}\,\tilde{Y}_i$, $\tilde{Z}_i^\dagger = \tilde{X}_i - \sqrt{-1}\,\tilde{Y}_i$ とする. $\zeta_i(p) = \tilde{Z}_i +$ (2次以上), $\bar{\zeta}_i(p) = \tilde{Z}_i^\dagger +$ (2次以上)である. 上のような $\{ ((\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n), (\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_1, \cdots, \tilde{Y}_n)) \}$ の組を点 p における **複素・正準座標系対** と呼んでおこう. これは点 p においては1次部分が正準座標系の役もする複素座標系のことだと思っても良い.

定義 2 ケーラー・ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ において，M の開部分集合 V に対して $f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_V)^C$ が**正則ワイル関数**であるとは，各 $p \in V$ で複素・正準座標系対 $\{(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n), (\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_1, \cdots, \tilde{Y}_n)\}$ をとり $\tilde{Z}_i = X_i + \sqrt{-1}\, Y_i$, $\tilde{Z}_i^\dagger = X_i - \sqrt{-1}\, Y_i$ としたとき，$f(p)$ が $\tilde{Z}_1^\dagger, \cdots, \tilde{Z}_n^\dagger$ を含まない $\boldsymbol{W}_p{}^C$ の元として $\odot_p$-積で表示される場合を言う．

上の定義は一見複素構造とは無関係に見えるかも知れないが，$\tilde{X}_i \to \lambda \tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i \to \lambda^{-1} \tilde{Y}_i$ のような変換はできないことに注目してもらいたい．また上の定義は複素・正準座標系対の選び方には関係しない．

定理 2 は局所的に定義された $\odot$-積に依存した述べ方になっていたが，上の定義を使うと，「ケーラー・ワイル多様体での局所座標変換は正則ワイル関数で表される」と述べて良くなり，話がすっきりする．

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_V)^C$ 内の正則ワイル関数全体を $\mathcal{H}(\boldsymbol{W}_V)$ と書くと，これは定理 1 より，$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_V)^C$ の可換部分環となる．しかし，$\boldsymbol{W}_M$ 全体で正則なワイル関数は，M がコンパクトだと定数関数しか存在しなくなることが正則関数に関する最大値の原理より示せることに注意しておく必要がある．

11° 非可換複素射影空間

ケーラー・ワイル多様体の典型的な例として，この節では非可換複素射影空間と呼べるようなワイル多様体を考えよう．

$\boldsymbol{W}_{2n}$ を $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$ から生成される階数 $2n$ のワイル代数とし，ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^{2n}} = \boldsymbol{R}^{2n} \times \boldsymbol{W}_{2n}$ を考える．$\boldsymbol{R}_*{}^{2n} = \boldsymbol{R}^{2n} - \{0\}$ とし，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*{}^{2n}}$ 上のワイル関数環を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*{}^{2n}})$，これの複素化を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*{}^{2n}})^C$ とする．$\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n$ を $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}^{2n}}$ 上の通常のワイル座標関数とし，$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*{}^{2n}}$ に制限して考える．

$\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ とし，積に関しての群とみなし，これをワイル座標関数に次式で作用させる：

$$(1)\quad \begin{cases} \rho(re^{i\theta})\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \qquad (r>0) \\ \rho(re^{i\theta})\nu = r^2\nu \end{cases}$$

これが基本関係式と両立しているのを確かめるのは容易で，これより ρ が $\boldsymbol{C}_*$ の $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})$ への同形写像としての作用に拡張できることがわかる．ρ を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ まで自然に拡張し，それも同じ記号で書いておこう．

$\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ を $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ の中で $\rho(\boldsymbol{C}_*)$-不変な元の全体とする．これは $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ の閉部分環である．$\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ をもとにワイル多様体を作っていこう．

まず，容易な計算で，

$$(2)\qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(e^t)f = \left(2\nu\,\partial_\nu + \sum_{i=1}^{n}(\xi_i \odot \partial_{\xi_i} + \eta_i \odot \partial_{\eta_i})\right)f,$$

$$(3)\qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(e^{i\theta})f = \sum_{j=1}^{n}(\xi_j \odot \partial_{\eta_j} - \eta_j \odot \partial_{\xi_j})f$$

を得る．(2), (3) の右辺をそれぞれ $\mathcal{L}_0 f$, $-\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\mathcal{R})f$ と記す．ただし，$\mathcal{R} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j{}^2 + \eta_j{}^2)$ である．$\mathcal{L}_0\mathcal{R} = 2\mathcal{R}$ なので $\mathcal{L}_0$ と $\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\mathcal{R})$ とは可換である．また (2), (3) よりただちに次がわかる：

$$(4)\quad \mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}} = \{ f \in \mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}};\ \mathcal{L}_0 f = 0,\ [\mathcal{R}, f] = 0 \},$$

さらに，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ にも $\odot$-積は拡張されるが，$\mathcal{L}_0$ と $\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\mathcal{R})$ が ξ_1, $\cdots$, ξ_n, η_1, $\cdots$, η_n の1次関数全体の空間を保つことを使って，

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_0(f\odot g) = (\mathcal{L}_0 f)\odot g + f\odot(\mathcal{L}_0 f) \\ [\mathcal{R}, f\odot g] = [\mathcal{R}, f]\odot g + f\odot[\mathcal{R}, g] \ ^{*)} \end{cases}$$

が成立することがわかる．特に $\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ は $\odot$-積に関しても閉じている

---

*) 一般には $[f, g\odot h] \neq [f, g]\odot h + g\odot[f, h]$ なので要注意.

ことがわかる．

次にこれらを複素変数を使って表わしてみよう．$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ を $\boldsymbol{R}^{2n}$ の座標関数で，$\xi_i = x_i{}^{\#}$，$\eta_i = y_i{}^{\#}$ となるものとし，$z_j = x_j + \sqrt{-1}\,y_j$，$Z_j = X_j + \sqrt{-1}\,Y_j$，$\zeta_j = \xi_j + \sqrt{-1}\,\eta_j$ とする．さらに，

$$\partial_{z_j} = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} - \sqrt{-1}\,\partial_{y_j}), \quad \partial_{Z_j} = \frac{1}{2}(\partial_{X_j} - \sqrt{-1}\,\partial_{Y_j}),$$

$$\partial_{\zeta_j} = \frac{1}{2}(\partial_{\xi_j} - \sqrt{-1}\,\partial_{\eta_j})$$

とする．これらを使うと (4) の定義式は，

$$(6) \qquad \left(2\nu\,\partial_\nu + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \odot \partial_{\zeta_j}\right) f = 0, \qquad \left(2\nu\,\partial_\nu + \sum_{j=1}^{n} \bar{\zeta}_j \odot \bar{\partial}_{\zeta_j}\right) f = 0$$

に変る．$\bar{\nu} = -\nu$ としておけば $2\nu\,\partial_\nu = 2\bar{\nu}\,\partial_{\bar{\nu}}$ であることに注意しよう．積公式の方は書き直すと，

$$(7) \quad f * g = f \exp i\nu(\overleftarrow{\partial}_\zeta \odot \overrightarrow{\partial}_{\bar{\zeta}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{\zeta}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\zeta})\, g \qquad (\,\bar{\partial}_{\zeta_i} = \partial_{\bar{\zeta}_i}\,)$$

に変る．

$U(n)$ を $\boldsymbol{C}^n$ に普通に作用しているユニタリー群とすると，任意の $T \in U(n)$ は自然に $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ にも作用し，$*$-積に関しても $\odot$-積に関しても同形写像となる．また，T は $\mathcal{L}_0$ と可換で，$T\mathcal{R} = \mathcal{R}$ である．したがって，$T\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}} = \mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ である．

さて，$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \odot \bar{\zeta}_j$ であるが，$[\mathcal{R}, \mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}] = \{0\}$ は自明である．そこで，$\mathcal{R}^{-1}$ を $*$-積による $\mathcal{R}$ の逆元とすれば，$\nu * \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ で $[\nu * \mathcal{R}^{-1}, \mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}] = \{0\}$ がわかる．つまり，$\nu * \mathcal{R}^{-1}$ は $\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{\boldsymbol{C}}$ の中心(center) の元である．

$\mathcal{R}^{-1}$ を，$\mathcal{R}$ の $\odot$-積で書いた関数として求めてみよう．$f(t)$ を1変数の $\boldsymbol{C}[\![\nu]\!]$-値関数とすると積公式より容易に，

$$\mathcal{R} * f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \odot f(\mathcal{R}) + \nu^2\left(\frac{n}{2} f'(\mathcal{R}) + \frac{1}{2} f''(\mathcal{R}) \odot \mathcal{R}\right)$$

を得る．$\mathcal{R} * f(\mathcal{R}) = 1$ となる f を求めるために $f = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^{2l} f_l$ とおき，ν^{2l} の

係数を見ると,

$$f_l(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{n}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{1}{x}\qquad (l=0,1,2,\cdots)$$

が得られる. これより, 次が得られる:

$$(8)\qquad \nu\mathcal{R}^{-1}=\frac{\nu}{\mathcal{R}}+\frac{n-2}{2}\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)^3-\frac{n-2}{2}\frac{3(n-4)}{2}\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)^5-\cdots$$

ただし, $\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)^k$ などは⊙-積による演算である.

同様の計算をもっと能率良く行って, $(\nu\mathcal{R}^{-1}*)^k$ ($*$-積による k 乗)を計算してみよう. そのために, $*$-積で, $e_*^{t\nu\mathcal{R}^{-1}}$ を考えると, これは微分方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(\mathcal{R})=\nu\mathcal{R}^{-1}*g_t(\mathcal{R}),\qquad g_0(\mathcal{R})=1$$

の解であるから, 両辺に $\mathcal{R}$ をかけて, ⊙-積に直すと,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{R}\odot g_t(\mathcal{R})+\nu^2\left(\frac{n}{2}g_t'(\mathcal{R})+\frac{1}{2}g_t''(\mathcal{R})\odot\mathcal{R}\right)\right)=\nu g_t(\mathcal{R})$$

を得る. $g_t(\mathcal{R})=\sum_{l=0}^{\infty}\nu^l g_t^{(l)}(\mathcal{R})$ とおいて計算すると,

$$(9)\qquad e_*^{t\nu\mathcal{R}^{-1}}=\sum\frac{t^n}{n!}(\nu\mathcal{R}^{-1})_*{}^n=\sum_{l\geq k}a_{k,l}t^k\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)_\odot^l$$

の形に計算できる. ただし, $a_{k,k}=1/k!$ である. t^n の係数を比較することにより,

$$(\nu\mathcal{R}^{-1})_*{}^n=\sum_{l=n}^{\infty}a_{n,l}\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)_\odot^l\qquad (n=1,2,\cdots)$$

の形に書けることがわかる. これは $\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}\right)_\odot^l$ に関して逆に解けるから, これで, $\frac{\nu}{\mathcal{R}}$ が $\nu\mathcal{R}^{-1}$ の $*$-積による関数として書けることがわかる.

さて, $\mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^C$ は一組のワイル座標関数では書けないから, $\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{R}^{2n}$ 内の開集合 D_1 を $\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}^n;\ z_1\neq 0\}$ で定義し, $\boldsymbol{W}_{D_1}$ 上で(6)をみたすワイル関数全体を求めることを考えよう. $\boldsymbol{R}_*{}^{2n}$ の任意の点は, 適当なユニタリ変換で $(z_1, 0, \cdots, 0)$ に写すことができるからここで考えておけば十分である.

$\mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{D_1})^C$ を $\boldsymbol{W}_{D_1}$ 上で (6) をみたすワイル関数の全体とすれば，ここでは ζ_1, $\bar{\zeta}_1$ に $\odot$-積での逆元 $\dfrac{1}{\zeta_1}$, $\dfrac{1}{\bar{\zeta}_1}$ があるが，積公式より，$\zeta_1 * \dfrac{1}{\zeta_1} = 1$, $\bar{\zeta}_1 * \dfrac{1}{\bar{\zeta}_1} = 1$ であるからこれらは $*$-積による逆元でもある．しかし，$\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1$ の $*$-積での逆元 $(\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1)^{-1}$ は $\dfrac{1}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1}$ ではなく，$\mathcal{R}^{-1}$ のときと同じ計算で

$$(\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1)^{-1} = \frac{1}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}\,\nu}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1}\right)^2 + 3^2\left(\frac{\sqrt{2}\,\nu}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1}\right)^4 + 3^2\cdot 5^2\left(\frac{\sqrt{2}\,\nu}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1}\right)^6 + \cdots\right)$$

であるから注意しなければならない．

さて，$\bar{\partial}_{\zeta_i} = \partial_{\bar{\zeta}_i}$ と書き，$\partial_{\zeta_i}\bar{\zeta}_j = \partial_{\bar{\zeta}_i}\zeta_j = 0$ に注意して (6) の第 1 式を見ると，これは f が $\nu, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$ に関して 0 次式になっていなければならないという式であり，第 2 式はそれが $\nu, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n$ についても 0 次式であるという式だから，結局 (6) の一般解は，

$$f\left(\frac{\nu}{\mathcal{R}}, \frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \cdots, \frac{\zeta_n}{\zeta_1}, \frac{\bar{\zeta}_2}{\bar{\zeta}_1}, \cdots, \frac{\bar{\zeta}_n}{\bar{\zeta}_1}\right)$$

の形をした $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_{D_1})^C$ の元全体であることがわかる．(9) を用いれば $\dfrac{\nu}{\mathcal{R}}$ は $\nu * \mathcal{R}^{-1}$ の関数として書け，$\nu * \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^C$ だから，$\mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{D_1})^C$ は $f\left(\nu * \mathcal{R}^{-1}, \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}, \cdots, \dfrac{\zeta_n}{\zeta_1}, \dfrac{\bar{\zeta}_2}{\bar{\zeta}_1}, \cdots, \dfrac{\bar{\zeta}_n}{\bar{\zeta}_1}\right)$ の形の元全体だとして良い．積公式を

$$\exp \nu i(\overleftarrow{\partial}_{\zeta} \odot \overrightarrow{\partial}_{\bar{\zeta}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{\zeta}} \odot \overrightarrow{\partial}_{\zeta}) = \exp \nu i(\overleftarrow{\partial}_{\zeta_1} \odot \overrightarrow{\partial}_{\bar{\zeta}_1} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{\zeta}_1} \odot \overrightarrow{\partial}_{\zeta_1})$$
$$\times \exp \nu i \sum_{j=2}^{n}(\overleftarrow{\partial}_{\zeta_j} \odot \overrightarrow{\partial}_{\bar{\zeta}_j} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{\zeta}_j} \odot \overrightarrow{\partial}_{\zeta_j})$$

と分解して計算すれば，$2 \leqq j, k \leqq n$ について次が得られる．

$$(10)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}, \dfrac{\zeta_k}{\zeta_1}\right] = \left[\dfrac{\bar{\zeta}_j}{\bar{\zeta}_1}, \dfrac{\bar{\zeta}_k}{\bar{\zeta}_1}\right] = 0 \\ \left[\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}, \dfrac{\bar{\zeta}_k}{\bar{\zeta}_1}\right] = 2\nu i\, \delta_{jk} \cos(\nu \partial_{\zeta_1} \partial_{\bar{\zeta}_1}) \dfrac{1}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1} \\ \qquad\qquad + 2i\, \zeta_j \odot \bar{\zeta}_k \odot \sin(\nu \partial_{\zeta_1} \partial_{\zeta_1}) \dfrac{1}{\zeta_1 \odot \bar{\zeta}_1} \end{cases}$$

(10) の形から $\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}, \cdots, \dfrac{\zeta_n}{\zeta_1}$ が量子化された複素座標系になることが推察されるから，別に $\boldsymbol{C}^{n-1} = \boldsymbol{R}^{2n-2}$ を用意し，$\boldsymbol{C}^{n-1}$ の通常の複素座標系を $\hat{z}_2$,

…, $\hat{z}_n$ とする．正準座標系はまだ与えられていないが，そういうものを作って，$\hat{z}_j{}^{\#}=\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}$ と考えたいわけである．そこで，$\boldsymbol{C}^{n-1}$ の原点 $\hat{z}_2=\cdots=\hat{z}_n=0$ における複素・正準座標系対を得るために，⊙-積による平方根を使って次のようなワイル関数 H を考える：

$$H=\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{l=2}^{n}\frac{\zeta_l}{\zeta_1}\odot\frac{\bar{\zeta}_l}{\bar{\zeta}_1}}}\qquad(\in\mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{D_1})^{C})$$

これを用いて，少々面倒な計算だが

$$(11)\qquad\begin{cases}\left[H\odot\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1},\ H\odot\dfrac{\zeta_k}{\zeta_1}\right]=0 & \mathrm{mod}\,(\nu*\mathcal{R}^{-1})^2\\[2ex]\left[H\odot\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1},\ \overline{H\odot\dfrac{\zeta_k}{\zeta_1}}\right]=2i(\nu*\mathcal{R}^{-1})\,\delta_{jk} & \mathrm{mod}\,(\nu*\mathcal{R}^{-1})^2\end{cases}$$

が得られる．この計算は $\mathrm{mod}(\nu*\mathcal{R}^{-1})^2$ で行うので結局ポアソン括弧積を計算すれば良いのである．(11) の形を見れば，$\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n$ を

$$\tilde{x}_j+\sqrt{-1}\,\tilde{y}_j=\frac{\hat{z}_j}{\sqrt{1+\sum_{k\geq 2}|\hat{z}_k|^2}},\qquad \tilde{x}_j-\sqrt{-1}\,\tilde{y}_j=\frac{(\hat{z}_j)^-}{\sqrt{1+\sum_{k\geq 2}|\hat{z}_k|^2}}$$

によって定め，$(\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n)$ を $\boldsymbol{R}^{2n-2}\,(=\boldsymbol{C}^{n-1})$ の正準座標系として採用すれば良いことがわかる．

1章 **7°** の定理でやったようにして (11) 式から補正を次々に繰返せば，$\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\psi_2,\cdots,\psi_n\in\mathcal{F}_{C_*}(\boldsymbol{W}_{D_1})^{C}$ で

$$[\varphi_j,\varphi_k]=[\psi_j,\psi_k]=0,\qquad[\varphi_j,\psi_k]=2i(\nu*\mathcal{R}^{-1})\,\delta_{jk}$$

であり，

$$\begin{cases}\varphi_j=H\odot\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}+(\nu*\mathcal{R}^{-1})\odot\varphi_j{}^{(1)}+(\nu*\mathcal{R}^{-1})^2\odot\varphi_j{}^{(2)}+\cdots\\[2ex]\psi_j=\overline{H\odot\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}}+(\nu*\mathcal{R}^{-1})\odot\psi_j{}^{(1)}+(\nu*\mathcal{R}^{-1})^2\odot\psi_j{}^{(2)}+\cdots\end{cases}$$

となるものが得られる．ただし，$(\nu*\mathcal{R}^{-1})^k$ は＊-積による演算である．これより

$$(12)\qquad \tilde{x}_j{}^{\#}\leftrightarrow\frac{1}{2}(\varphi_j+\sqrt{-1}\,\psi_j),\quad \tilde{y}_j{}^{\#}\leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\varphi_j-\sqrt{-1}\,\psi_j),$$

$$\nu \leftrightarrow \nu * \mathcal{R}^{-1}$$

という対応をつければ $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}'_{\boldsymbol{R}^{2n-2}})^{C}$ と $\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{D_1})^{C}$ とが同形であることがわかる．ただし，$\boldsymbol{W}'_{\boldsymbol{R}^{2n-2}}$ は $2n-2$ 個の生成元を持つ階数が $2n-2$ のワイル代数 $\boldsymbol{W}'_{2n-2}$ から作った自明束 $\boldsymbol{R}^{2n-2}\times\boldsymbol{W}'_{2n-2}$ のことである．

座標変換はユニタリー変換を通じて行うので，これがワイル同相写像であることを見るのは難しくない．これで，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{C}_*}(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{R}_*^{2n}})^{C}$ が複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^{n-1}$ を底空間とするワイル多様体 $\boldsymbol{W}'_{CP^{n-1}}$ 上のワイル関数環 $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}'_{CP^{n-1}})^{C}$ と同形であることがわかる．

さらに，これをケーラー・ワイル多様体にするには，(12) の対応を通して $\hat{z}_j{}^{\#}\leftrightarrow\dfrac{\zeta_j}{\zeta_1}$ と考えた場合に，

(13)　　$\hat{z}_j=(\tilde{x}_j+\sqrt{-1}\,\tilde{y}_j)+(\text{2 次以上})$　　　$(2\leqq j\leqq n)$

となることに注目する．つまり $\hat{z}_2,\cdots,\hat{z}_n$ は原点では正準座標形の役目もはたしている．

そこで，$\tilde{x}_j{}^{\#}(0)=\tilde{X}_j$，$\tilde{y}_j{}^{\#}(0)=\tilde{Y}_j$ とし，$\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n$，$\tilde{Y}_2,\cdots,\tilde{Y}_n$ を 1 次の元，$\nu*\mathcal{R}^{-1}$ を 2 次の元と考えることで次数作用素を，$J\tilde{X}_j=-\tilde{Y}_j$，$J\tilde{Y}_j=\tilde{X}_j$ とすることで $\rho_{\exp i\theta}$ をきめる．これは $\rho_{\exp i\theta}(\tilde{x}_j+\sqrt{-1}\,\tilde{y}_j)^{\#}=e^{i\theta}(\tilde{x}_j+\sqrt{-1}\,\tilde{y}_j)^{\#}$ と定義しているにすぎないから，次数作用素とも，任意のユニタリー変換とも可換になる．したがって，これで $\boldsymbol{W}'_{CP^{n-1}}$ 上に次数作用素場 D_0 と調和振動子場 $\rho_{\exp i\theta}$ が定義された．

次に接続 ∇^G, ∇^Ω を見るのであるが, $\hat{z}_j=\hat{x}_j+\sqrt{-1}\,\hat{y}_j$ とおき $\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n$, $\hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_n$ に関して $G(p)_{ij}$ を計算してみれば

$$\delta_{ij}+(\text{2 次以上})$$

の形となり，原点では $\left\{\begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix}\right\}(0)=0$ がわかる．つまり，∇^G に関する共変微分は原点では $\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n$, $\hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_n$ による通常の微分 $\partial_{\hat{x}_j}$, $\partial_{\hat{y}_j}$ と同じになる．一方 (13) よりこれらは原点においては $\partial_{\tilde{x}_j}$, $\partial_{\tilde{y}_j}$ と同じである．

ところが, ∇^Ω の方は正準座標系を使った場合には通常の微分を意味するから，これで $\boldsymbol{R}^{2n-2}=\boldsymbol{C}^{n-1}$ の原点では $\nabla^\Omega=\nabla^G$ が言えた．しかし，$\boldsymbol{W}_{CP^{n-1}}$ 上

ではユニタリー変換によってどの点でも $\boldsymbol{R}^{2n-2}$ の原点に持ってくることができ，しかもユニタリー変換は ∇^{Ω} とも ∇^{G} とも可換であるから，1点で $\nabla^{\Omega}=\nabla^{G}$ が言えればすべての点で $\nabla^{\Omega}=\nabla^{G}$ が言える．これで $\boldsymbol{W}_{CP^{n-1}}$ がケーラー・ワイル多様体であることがわかる．

この証明を見れば当然気付くであろうが，任意のケーラー多様体 M を底空間としてケーラー・ワイル多様体 $\boldsymbol{W}_M$ を構成することができる．(しかし，一般には $\boldsymbol{W}_M$ は1個とは限らず，ワイル同相にならないものが無数にあると思われる．)

12° 場の理論的「点」の考え方

次章とのつながりを良くするため，この節では，いささか数学的厳密さは欠くが，ワイル多様体，特にケーラー・ワイル多様体が，場の量子論の考え方とどのように関係しているかを解説しておこう．

$\boldsymbol{W}_M$ をケーラー・ワイル多様体とする．M は複素多様体であるが，ここではもっと強く，次の性質を持っているとしよう：

〈仮定〉　各 $p\in M$ に対し，M 全体で定義された正則関数 $f_1, \cdots, f_n$ があって，$(f_1, \cdots, f_n)$ は p の近傍では M の座標関数になっている．

つまり，複素座標関数として M 上の正則関数がとれることを要求している訳で，このような都合の良い性質を持った複素多様体を**シュタイン多様体**と呼んでいる．シュタイン多様体上には正則関数がたくさん存在している訳で，無論コンパクトではない．

$\mathcal{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ を $\boldsymbol{W}_M$ 上のワイル関数環の複素化とする．さらに $\mathcal{H}(\boldsymbol{W}_M)$ を $\boldsymbol{W}_M$ 上の正則ワイル関数の全体，$\mathcal{H}(\boldsymbol{W}_M)^{\dagger}$ を $\boldsymbol{W}_M$ 上の反正則ワイル関数(**10°** の定義2において $\tilde{Z}_1, \cdots, \tilde{Z}_n$ を含まない $\boldsymbol{W}_P{}^C$ の元として書けるもの) 全

体としよう．

証明は省略するが，次の定理が成立する：

定理 1 $\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)$, $\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)^\dagger$ は $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ の極大可換部分環であり，さらにこれらは M 上の正則関数環，反正則関数環と同形である．

さて，$\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ は $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ の部分環ではあるが，$\bar{\nu}=-\nu$ と約束してあるので，$f\in\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)$ であっても $\bar{f}=f$ は一般に成立しないし，$\overline{f*g}=\bar{g}*\bar{f}$ であることに注意しよう．

$\bar{f}=f$ となるような $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ の元を **エルミート** なワイル関数と呼び，その全体を $\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ と書こう．$\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ は $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ の閉部分空間ではあるが，$*$-積に関しては閉じていない．その代り，対称積

$$f\circ g=\frac{1}{2}(f*g+g*f)$$

に関して閉じており，$(\sum_H(\boldsymbol{W}_M),\ \circ)$ はジョルダン環となる．

行列環との類似で言うと，$\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ を全行列環としたとき，$\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)$, $\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)^\dagger$ はそれぞれ上三角行列，下三角行列の全体で，$\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ がエルミート行列全体にあたる．実対角行列全体にあたるものは，$(\sum_H(\boldsymbol{W}_M),\ \circ)$ の中の極大結合部分代数，つまり，$(\sum_H(\boldsymbol{W}_M),\ \circ)$ の $\circ$-積に関する部分代数 $(\mathscr{A},\ \circ)$ で，$\circ$-積に関して結合律をみたし，かつ包含関係に関して極大なものである．ツォルンの補題を使えばかようなものの存在は証明できる．しかし，2 つの極大結合部分代数がいつでも同形か否かについては何もわかっていない．（多分否定的であろう．）

$\mathscr{A}$ を $(\sum_H(\boldsymbol{W}_M),\ \circ)$ の極大結合部分代数としよう．極大性より，$\mathscr{A}$ は閉部分環で，$\mathscr{A}\ni 1,\ \dfrac{\nu}{\sqrt{-1}}$ である．$(\mathscr{A},\ \circ)$ は可換環であるが，$\mathscr{A}$ が $*$-積で閉じているとは限らない．しかし

$$f\circ(g\circ h)-(f\circ g)\circ h=-\frac{1}{4}[g,\ [f,\ h]]$$

であるので, $*$-積に関して $[\mathscr{A}, [\mathscr{A}, \mathscr{A}]]=\{0\}$ となる. $[f, g]^{-}=-[f, g]$ だから $[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$ の元は歪エルミートとなり, $\mathscr{A}\cap[\mathscr{A}, \mathscr{A}]=\{0\}$ である.

$\mathscr{A}$ またはその自然な拡張を使って点集合 N を作り出しこれを時空とか配位空間のごとく考えようというのが最近の場の理論の傾向であるが, ここで次のことに注意しておこう. $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C\supset\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)$, $\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)^{\dagger}$ であるが, 任意の $f\in\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C$ は $f=f(z_1, \cdots, z_n, \bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$ と $(z_1, \cdots, z_n, \bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$ の関数として書けるので, $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C=\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)\otimes\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)^{\dagger}$ と考えられる. 特に, $\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ の元は, $\sum_\lambda a_\lambda f_\lambda*\bar{f}_\lambda$, $a_\lambda\in\boldsymbol{R}$, $f_\lambda\in\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)$, の形に書けると考えられる. したがって, 特に $\mathscr{A}$ の元が N 上の関数として表示される場合には, 点 $p\in N$ に台を持つ δ 関数 δ_p のごときものも(超関数的な意味でだが) $\sum_\lambda a_\lambda f_\lambda*\bar{f}_\lambda$, $f_\lambda\in\mathscr{H}(\boldsymbol{W}_M)$, の形に表示されると考えられるのである. しかし, これの具体的な形は全く不明だから, この節では, $\mathscr{A}$ の性質に話を限ってもう少し詳しく考察しよう.

(A)　$[\mathscr{A}, \mathscr{A}]=\{0\}$ の場合：　この場合には $\mathscr{A}$ の $\circ$-積は $*$-積と同じであり, $(\mathscr{A}, *)$ も可換代数となる. $\mathscr{A}\subset\nu\sqrt{-1}\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ ならば $\dfrac{1}{\nu}\sqrt{-1}\mathscr{A}$ も $*$-積に関して可換で $\dfrac{1}{\nu}\sqrt{-1}\mathscr{A}\supset\mathscr{A}$ となるから, $\mathscr{A}$ の極大性を考えるならば $\mathscr{A}\supsetneqq\nu\sqrt{-1}\sum_H(\boldsymbol{W}_M)\cap\mathscr{A}$ として良い. そうすると, $\mathscr{A}/\nu\sqrt{-1}\mathscr{A}$ は $\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C/\nu\mathscr{F}(\boldsymbol{W}_M)^C\cong C_C{}^\infty(M)$ の部分環になっている訳で, $\mathscr{A}/\nu\sqrt{-1}\mathscr{A}$ の元で識別できない M の点を同一視することにより, $\mathscr{A}/\nu\sqrt{-1}\mathscr{A}$ はある集合 N 上の連続関数から成る代数と見ることができる.

行列での類似で言えば, 行列の対角線という位置を示しているのが N という集合である.

(B)　$[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\neq\{0\}$ の場合：　この場合 $\dfrac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\subset\sum_H(\boldsymbol{W}_M)$ であるが, $\left[\mathscr{A}, \dfrac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\right]=\{0\}$, $\left[\dfrac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}], \dfrac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\right]=\{0\}$ なので, $\mathscr{A}+\dfrac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$ も $\circ$-積に関して閉じており, しかも $\circ$-積が結合律をみたしてい

ることがわかる．したがって極大性より

$$\frac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \subset \mathscr{A}, \qquad \sqrt{-1}[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \subset \mathscr{A}$$

を得る．さらに次のこともわかる：

補題 1　$\mathscr{A}^C = \mathscr{A} \oplus \sqrt{-1}\mathscr{A}$ は＊-積に関して閉じている．

証明　$f, g \in \mathscr{A}$ に対して $f * g = f \circ g + \sqrt{-1} \cdot \frac{\nu}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\nu}[f, g]$ であり，$f \circ g \in \mathscr{A}$, $\frac{1}{\nu}[f, g] \in \mathscr{A}$ だから $f * g \in \mathscr{A}^C$ となる．これより $\mathscr{A}^C * \mathscr{A}^C \subset \mathscr{A}^C$ が示せる．□

さて，$\mathscr{C}_0 = \{a \in \mathscr{A};\ [a, \mathscr{A}] = \{0\}\}$ とする．$\mathscr{C}_0 \ni 1$, $\frac{\nu}{\sqrt{-1}}$ であり，$[\mathscr{A}, [\mathscr{A}, \mathscr{A}]] = \{0\}$ より，$\mathscr{C}_0 \supset \frac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$ である．$\mathscr{C}_0$ は $\mathscr{A}$ の閉部分環であり，$\mathscr{C}_0 * \mathscr{A} = \mathscr{A}$ をみたす．

ここで，次のような仮定をしよう：

〈**仮定**〉　$\mathscr{A}$ の閉部分空間 $\mathscr{C}_1$ で，$\mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_1$, $\mathscr{A} = \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{C}_1$（直和）をみたすものが存在する．

このような直和因子の存在は決して自明なことではないが，$\mathscr{A}$ が $\mathscr{C}_0$ を係数環と見て有限次元となっている場合などを考えてみれば自然であろう．この仮定の下では，$[\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_1] = [\mathscr{A}, \mathscr{A}]$ だから，

$$\frac{1}{\nu}[\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_1] \subset \mathscr{C}_0, \qquad \mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_0, \qquad \mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_1$$

となる．さらに，$c, c' \in \mathscr{C}_1$, $a \in \mathscr{A}$ に対し，

$$\frac{1}{\nu}[a, c \circ c'] = \frac{1}{\nu}[a, c] \circ c' + \frac{1}{\nu}[a, c'] \circ c$$

であるが $\frac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \subset \mathscr{C}_0$ だから上式の左辺は $\mathscr{C}_0$ に，右辺は $\mathscr{C}_0 \circ \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_1$ に属する．したがって $\frac{1}{\nu}[\mathscr{A}, \mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_1] = \{0\}$ で，

$$\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_0$$

を得る．$\mathscr{C}_1 * \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_0 \circ \mathscr{C}_0 + \sqrt{-1} \cdot \dfrac{\nu}{2\sqrt{-1}} \cdot \dfrac{1}{\nu} [\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_0] \subset \mathscr{C}_0 + \sqrt{-1}\mathscr{C}_0$ だから結局次のことがわかる．

補題 2 $\mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_0$，　$\mathscr{C}_0 * \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_1$，　$\mathscr{C}_1 * \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_0 \oplus \sqrt{-1}\mathscr{C}_0$

上の結果から，$\mathscr{C}_i^{\boldsymbol{C}} = \mathscr{C}_i \oplus \sqrt{-1}\mathscr{C}_i$ ($i = 0, 1$) とすれば，$\mathscr{A}^{\boldsymbol{C}} = \mathscr{A}_0^{\boldsymbol{C}} \oplus \mathscr{C}_1^{\boldsymbol{C}}$ であり，$\mathscr{C}_i^{\boldsymbol{C}} * \mathscr{C}_j^{\boldsymbol{C}} = \mathscr{C}_{[i+j]}^{\boldsymbol{C}}$ となる．ただし $[i+j]$ は $i+j \bmod 2$ の意味である．同様に $\mathscr{C}_i \circ \mathscr{C}_j = \mathscr{C}_{[i+j]}$ となる．

そこで，こんどは $\mathscr{A} = \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{C}_1$ に○-積とも$*$-積とも違う次のような□-積を定義しよう：$c_0, c_0' \in \mathscr{C}_0$，$c_1, c_1' \in \mathscr{C}_1$ として，

$$(c_0 + c_1) \square (c_0' + c_1') = c_0 * c_0' + c_0 * c_1' + c_1 * c_0' + \frac{1}{\nu}[c_1, c_1'].$$

補題 3 ($\mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{C}_1$, □) は結合律をみたす代数であり，次の性質を持つ：$a_i, b_i \in \mathscr{C}_i$ ($i = 0, 1$) のとき，

$$a_i \square b_j = (-1)^{ij} b_j \square a_i \in \mathscr{C}_{[i+j]}$$

証明 結合律のみ調べれば十分であろう．$c_1, c_1', c_1'' \in \mathscr{C}_1$ のとき，$c_1 \square (c_1' \square c_1'') = \dfrac{1}{\nu} c_1 * [c_1', c_1'']$，$(c_1 \square c_1') \square c_1'' = \dfrac{1}{\nu}[c_1, c_1'] * c_1''$ だから，[,] を分解して，$[\mathscr{C}_1^{\boldsymbol{C}}, \mathscr{C}_1^{\boldsymbol{C}} * \mathscr{C}_1^{\boldsymbol{C}}] = \{0\}$ を使えば，$c_1 * [c_1', c_1''] - [c_1, c_1'] * c_1'' = [c_1', c_1 * c_1''] = 0$ となり，

$$c_1 \square (c_1' \square c_1'') = (c_1 \square c_1') \square c_1''$$

が得られる．$c_0 \in \mathscr{C}_0$，$c_1, c_1' \in \mathscr{C}_1$ のときには

$$c_0 \square (c_1 \square c_1') = c_0 * \frac{1}{\nu}[c_1, c_1'] = \frac{1}{\nu}[c_0 * c_1, c_1'] = (c_0 \square c_1) \square c_1'.$$

$c_0, c_0' \in \mathscr{C}_0$，$c_1 \in \mathscr{C}_1$ のときには

$$c_0 \square (c_0' \square c_1) = c_0 * (c_0' * c_1) = (c_0 \square c_0') \square c_1$$

となる．他も同様である．　□

上の補題に出てくるような代数は **超可換代数** と呼ばれている．$\mathscr{C}_0$ の元を **偶元**, $\mathscr{C}_1$ の元を **奇元** と呼んで，$(\mathscr{A}, \square)$ をあたかも可換環のごとくに扱ってしまうのである．この組織的な取扱については，本当はもっと詳述すべきであろうが，詳しくは次の本を参照してもらいたい：

B. De Witt. Super Manifold, Cambridge Press, 1984.

ここでは，単に，ワイル多様体の枠組を少し変えるだけで，超多様体のようなものが自然に得られる可能性があるということだけを観察して先へ進もう．

第3章 量　子　場

場の量子論は数学の側から見ると得体の知れない物理学で，数学的形式だけを見ると，無限次元ハミルトン系の一種には違いないのだろうが，ハミルトン関数を密度関数の積分として書くというところで配位空間（時空）とかかわりを持ってくる．ところがこのかかわりは希薄だから，1個または数個のハミルトン関数が時空を指定してしまうといったことは起きずに，むしろ，場の理論的に等価なものが様々な時空多様体の上に実現されてしまうように思える．

場の量子論まで来て，我々は本格的に「点とは何か」を問題にしなくてはならなくなっているのである．

1° 古典場の正準形

場の理論というのは通常，場の時間変化を論ずるものなので，ここでは最も古典的なものから出発しよう．

コンパクト C^∞ リーマン多様体 N を考え，N 上に電荷のような正負のあるものがばらまかれているとし，$\varphi\colon N\to\boldsymbol{R}$ をその密度関数としよう．φ は時間 t によって変化するものとし，質点の力学でやったのと同じ考え方で $(\varphi, \dot\varphi)$ をこの系の状態と考える．ただし，$\dot\varphi=\dfrac{d}{dt}\varphi$ である．$\boldsymbol{E}=C^\infty(N)$ を配位空間と考え，$\phi\in\boldsymbol{E}$ とする．$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{E}$ の接バンドルと考え

$(\varphi, \dot{\varphi}) \in \boldsymbol{E}^2$ と考える．$\varphi = \varphi_t$ の時間変化を問題にするために変分法を使うことにし，$\boldsymbol{E}^2$ 上で定義された関数 $L(\varphi, \dot{\varphi})$ ($L\colon \boldsymbol{E}^2 \to \boldsymbol{R}$) をラグランジェ関数として固定し，配位空間 $\boldsymbol{E}$ 内の曲線 $c(t) = \varphi_t$ に対して，(汎)関数

$$J(c) = \int_a^b L(\varphi_t,\ \dot{\varphi}_a)\, dt$$

が停留するという条件で φ_t の時間変化の法則を求めることを考える．曲線の両端 $c(a) = \varphi_a$, $c(b) = \varphi_b$ は固定されているとすれば，測地線の場合と同じ計算で停留曲線は

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dt}(d_2L)(\varphi_t,\ \dot{\varphi}_t) = (d_1L)(\varphi_t,\ \dot{\varphi}_t)$$

をみたすことがわかる．ただし d_iL は i–番目の変数による微分なので，ここで少し無限次元の場合の微分法を解説しておこう．

(**A**) $\boldsymbol{F}$ を可算個のセミノルム系 $\{|\cdot|_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ で定義されたフレッシェ空間とし，U を $\boldsymbol{F}$ の開集合とする．U 上で定義された連続関数 $J\colon U \to \boldsymbol{R}$ が点 $a \in U$ で $h \in \boldsymbol{F}$ 方向に微分可能とは，

$$(dJ)(a)(h) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} J(a + \varepsilon h)$$

が存在する場合を言う．$(dJ)(a)(h)$ がすべての $h \in \boldsymbol{F}$ について存在し，$dJ\colon U \times \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$ が連続のとき，J は U 上で $\boldsymbol{C^1}$ **級**であると言う．C^1 級ならば $(dJ)(a)\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$ は線形写像となる．J が U 上 C^1 級で，任意の $a \in U$, $h_1, h_2 \in \boldsymbol{F}$ に対し

$$(d^2J)(a)(h_1,\ h_2) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (dJ)(a + \varepsilon h_1)(h_2)$$

が存在し，$d^2J\colon U \times \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$ が連続のとき $\boldsymbol{C^2}$ **級**と呼ぶ．C^2 級ならば $(d^2J)(a)\colon \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$ は対称な双線形写像となる．

以下同様に，$(d^mJ)(a)(h_1, \cdots, h_m)$ を定義し，C^m 級を定義する．この定義は，バナッハ空間で普通使われている定義と少し違うが，C^∞ 級 (各 m に

対し C^m 級）の場合は結局どの定義を採用していても同じとなるからあまり気にする必要はない．また，微分の計算に関する限り，普通の規則が全部あてはまる*)．要するに，偏微分商というものがないから定義が一寸変っているが，何も気にすることはないのである．

さて，話を $L(\varphi, \dot{\varphi})$ に戻すと，L が C^1 級であれば (1) は意味を持つのだが，普通は次のようなもっと強い仮定の下で考える：

〈**仮定**〉 **ラグランジェ密度関数**と呼ばれる $\boldsymbol{R}_N \oplus \boldsymbol{R}_N \oplus T^*N$ 上の C^∞ 関数 $\mathscr{L}$ が存在し，L は N 上の体積要素 dV_x を用いて

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_N \mathscr{L}(\varphi(x), \dot{\varphi}(x), d\varphi(x))\, dV_x$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{R}_N$ は N 上の自明束 $N \times \boldsymbol{R}$，直和 $\oplus$ は各 $x \in N$ でファイバーのみの直積空間を作って得られるベクトル束を意味する．

この仮定の下では，普通の変分法の計算で停留関数がみたす偏微分方程式を求めることができる．$\mathscr{L}$ を局所座標系を用いて書いて $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x^1, \cdots, x^n, u, v, w_1, \cdots, w_n)$ $(\sum w_i dx^i \in T^*N)$ とすれば $\dfrac{\partial}{\partial u}\mathscr{L}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}\mathscr{L}$, $\dfrac{\partial}{\partial w_i}\mathscr{L}$ などは通常の偏微分として意味を持つが，記号を節約してこれらを $\mathscr{L}_{\varphi(x)}$, $\mathscr{L}_{\dot{\varphi}(x)}$, $\mathscr{L}_{\varphi_{x^i}(x)}$ とか，$\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(x)}$, $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}$, $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{x^i}(x)}$ のように書く．N がコンパクトだから，部分積分を使って，停留関数 φ_t は次をみたすことがわかる：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}(\varphi_t(x), \dot{\varphi}_t(x), d\varphi_t(x))\\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(x)}(\varphi_t(x), \dot{\varphi}_t(x), d\varphi_t(x))\\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{x^i}(x)}(\varphi_t(x), \dot{\varphi}_t(x), d\varphi_t(x)).\end{aligned}$$

---

*) R. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc., 1982, pp 65-222 の Part I に詳細が論じてある．

右辺のは局所座標系のとり方に依存しているかに見えるが，実はそうでなく N 上で意味がある．上の式は普通は

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{L}_{\dot{\varphi}(x)} = \mathscr{L}_{\varphi(x)} - \mathrm{div}\,\mathscr{L}_{d\varphi(x)}$$

のように簡略化して書かれる．

(2) は密度関数を用いて書かれているので，これをなるべく一般的な立場で書いてみよう：

（**B**） $E^0 = L_2(N)$（2 乗可積分関数全体）とすると，自然に $E^0 \supset \boldsymbol{E}$（$= C^\infty(N)$）である．$\boldsymbol{E}$ の相対空間を $\boldsymbol{E}^*$ とすると，E^0 の内積を経由して，自然に $\boldsymbol{E}^* \supset E^0 \supset \boldsymbol{E}$ と考えられる．L は〈仮定〉を使うと C^∞ 級であることがわかるが，実はそればかりでなく，任意の $\varphi \in \boldsymbol{E}$ で，$(d_iL)(\varphi)$：$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$ が $(d_iL)(\varphi)$：$\boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{R}$ なる連続線形写像に拡張できることが容易にわかる．拡張されたものも同じ記号で書き，δ_x を点 $x \in N$ に台を持つ δ-関数とし，

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta\varphi(x)}(\varphi,\ \pi) &= (d_1L)(\varphi,\ \pi)(\delta_x), \\ \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(x)} &= (d_2L)(\varphi,\ \pi)(\delta_x) \end{aligned}$$

と定義すると，部分積分を用いる容易な計算で，

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi(x)}(\varphi,\ \pi) = \mathscr{L}_{\varphi(x)} - \mathrm{div}\,\mathscr{L}_{d\varphi(x)}, \qquad \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(x)}(\varphi,\ \pi) = \mathscr{L}_{\dot{\varphi}(x)}$$

が得られることがわかる．してみると，停留関数 φ_t がみたす方程式を得ることだけが目的ならば，〈仮定〉の代りに $(d_iL)(\varphi)$ の定義域が $\boldsymbol{E}^*$ まで広がっておれば十分で，その場合には (2) に相当するものは次のようになる：

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(x)} = \frac{\delta L}{\delta\varphi(x)}.$$

しかし，良く考えると (4) は奇妙な内容を含んでいる．

N' を $\dim N' = \dim N$ であるような別のコンパクト C^∞ リーマン多様体とし，N の場合と同様に $\acute{\boldsymbol{E}}$, $\acute{\boldsymbol{E}}^0$, $\acute{\boldsymbol{E}}^*$（$\acute{\boldsymbol{E}} = C^\infty(N')$）を作ると，2 章 **5°** 補

題1により，$(\boldsymbol{E}, E^0, \boldsymbol{E}^*)$ と $(\hat{\boldsymbol{E}}, \hat{E}^0, \hat{\boldsymbol{E}}^*)$ とは線形空間としては全く同じものと考えて良い．したがって，L は $\hat{\boldsymbol{E}}^2$ 上の関数と思っても良い．$x \in N$, $y \in N'$ とすれば $\delta_x \in \boldsymbol{E}^*$, $\delta_y \in \hat{\boldsymbol{E}}^*$ だが，上の同一視を行えば，$\{\delta_y, y \in N'\} \subset \boldsymbol{E}^*$ と思っても良い．そうすれば (4) は $x \in N$ を $y \in N'$ に代えても成立するわけで，(4) に関する限りどの多様体上で書いても，それは単に座標系を変換しているようなもので，内容は全く変らない，という結論が得られる．したがって，密度関数が存在するという仮定は (4) を偏微分方程式として書きたいという，それだけの理由で仮定されるものだということがわかる．L と N の結びつきは希薄であって，運動方程式が偏微分方程式になっていなくてもかまわないという立場をとれば，N は次元さえ等しければ何をとってもかまわなくなるのである．

話を再び (2) に戻そう．(2) では φ が陽に現われていないので，任意に固定した $x \in N$ で

(5) $$\pi(x) = \mathscr{L}_{\dot{\varphi}(x)}(\varphi(x), \dot{\varphi}(x), d\varphi(x))$$

とおき，これが $\dot{\varphi}(x)$ に関して逆に解ける，つまり $\mathscr{L}$ が超正則と仮定し，それを

(6) $$\dot{\varphi}(x) = \Phi(\varphi(x), \pi(x), d\varphi(x))$$

と書こう．(6) と，(2) の右辺に (6) を代入したものを使えば

(7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x) = \Phi(\varphi(x), \pi(x), d\varphi(x)) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(x) = \mathscr{L}_{\varphi(x)} - \operatorname{div}\mathscr{L}_{d\varphi(x)} \qquad (\dot{\varphi}(x) \text{ には (6) を代入}) \end{cases}$$

となるので，まずこの式を正準方程式に直そう．

まず，ルジャンドル変換にあたるものを，各 $x \in N$ で

(8) $$\mathscr{H}(\pi(x), \varphi(x), d\varphi(x)) = \pi(x)\cdot\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L}(\varphi(x), \dot{\varphi}(x), d\varphi(x))$$

$(\dot{\varphi}(x)$ には (6) を代入$)$で定義し，これを **ハミルトン密度関数** と呼ぶ．実際のハミルトン関数 H は $\boldsymbol{E}^2$ 上の C^∞ 級関数として

$$(9)\qquad H(\pi,\ \varphi)=\int_N \mathscr{H}(\pi(x),\ \varphi(x),\ d\varphi(x))\,dV_x \\ (=\langle\pi,\ \dot{\varphi}\rangle - L(\varphi,\ \pi))$$

で与えられる．この H に対し (**B**) でやった計算法を使うと，

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta\pi(x)}=\Phi(\varphi(x),\ \pi(x),\ d\varphi(x)) \\ \dfrac{\delta H}{\delta\varphi(x)}=-\mathscr{L}_{\varphi(x)}+\operatorname{div}\mathscr{L}_{d\varphi(x)} \qquad (\dot{\varphi}(x)\text{ には (6) を代入}) \end{cases}$$

が容易に得られる．これと (7) とを比較して，各 $x\in N$ で，

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=\dfrac{\delta H}{\delta\pi(x)} \\ \qquad\qquad (=\mathscr{H}_{\pi(x)}(\pi(x),\ \varphi(x),\ d\varphi(x))) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(x)=-\dfrac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \\ \qquad\qquad (=-\mathscr{H}_{\varphi(x)}+\operatorname{div}\mathscr{H}_{d\varphi(x)}) \end{cases}$$

という正準方程式が得られた．この場合も $\dfrac{\delta H}{\delta\pi(x)}$, $\dfrac{\delta H}{\delta\varphi(x)}$ が存在するためだけならば，密度関数 $\mathscr{H}$ は不要で，$(d_iH)(\pi,\ \varphi)$ ($i=1,2$) が $\boldsymbol{E}^*$ まで拡張できれば良いし，どの N で書いても良い．H が密度関数を持つので (11) は偏微分方程式になっている．

また，(11) の形より，密度関数 $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ を持つ関数 $H(\pi,\ \varphi)$, $H'(\pi,\ \varphi)$ に対してポアソン括弧は

$$(12)\qquad \begin{aligned}\{H,\ H'\}&=\int_N\left(\frac{\delta H}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta H'}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta H}{\delta\pi(x)}\frac{\delta H'}{\delta\varphi(x)}\right)dV_x \\ &=H\int_N\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}-\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)}\right)dV_x\,H'\end{aligned}$$

と定義すべきことがわかる．$\{H,\ H'\}$ も密度関数を持つが，この密度関数には，$d\varphi(x)$ だけでなく $d^2\varphi(x)$ も含まれている．つまり，密度関数なるものの定義される場所が変る．

さらに，$H\cdot H'$ を考えると，これは $\boldsymbol{R}_N\oplus\boldsymbol{R}_N\oplus T^*N$ 上の関数としての密度関数は持たないが，

$$H\cdot H' = \int_{N\times N} \mathcal{H}(x)\mathcal{H}'(y)\, dV_x dV_y$$

と考え，密度関数なるものの定義される場所を変えれば密度関数を持つと考えて良い．このように見ると，場の理論で普通に課せられている「密度関数を持つべし」とか「偏微分方程式で書けるべし」という要請は数学的に見る限りすっきりしない要請であると言わざるを得ない．

(C)　ところで，H, H' が密度関数 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ を持つ場合には，

$$H = \int_N \mathcal{H}(x)\, dV_x, \qquad H' = \int_N \mathcal{H}'(y)\, dV_y$$

であり，$\{\ ,\ \}$ は双線形だから，

$$\{H,\ H'\} = \int_N \int_N \{\mathcal{H}(x),\ \mathcal{H}'(y)\} dV_x dV_y \tag{13}$$

と書いて良いはずで，この意味で $\{\mathcal{H}(x),\ \mathcal{H}'(y)\}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x),\ \mathcal{H}'(y)\} = (&(\mathcal{H}_{\varphi(x)} - \operatorname{div}\mathcal{H}_{d\varphi(x)})\mathcal{H}'_{\pi(y)} \\ &- \mathcal{H}_{\pi(x)}(\mathcal{H}'_{\varphi(x)} - \operatorname{div}\mathcal{H}_{d\varphi(x)}))\,\delta_x(y)\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる．これを使い，$\varphi(\cdot)$, $\pi(\cdot)$ などを関数 $(\pi,\ \varphi) \mapsto \int_N \varphi(x)\, dV_x$, $(\pi,\ \varphi) \mapsto \int_N \pi(y)\, dV_y$ の密度関数と思えば，

$$\{\varphi(x),\ \varphi(y)\} = \{\pi(x),\ \pi(y)\} = 0, \qquad \{\varphi(x),\ \pi(y)\} = \delta_x(y) \tag{15}$$

であることもわかる．(15) は積分記号 $\int_N$ の下で成立する等式と解釈することもできる．積分記号下では (15) の他に

$$\frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta\pi(y)}{\delta\pi(x)} = \delta_x(y) \tag{16}$$

とおいて計算してかまわない．この計算の約束を少し拡大解釈すると，(11) 式は次のようにも書ける：

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x) &= \{\varphi(x),\ H\} \\ \frac{\partial}{\partial t}\pi(x) &= \{\pi(x),\ H\}\end{aligned}\right. \tag{17}$$

なぜなら，自然に

$$\{\varphi(x),\ H\} = \int_N \{\varphi(x),\ \mathscr{H}(\pi(y),\ \varphi(y),\ d\varphi(y))\}dV_y$$

と考えられるから，これに(15)を使えば(11)の形となるからである．しかし，(15)～(17)の形は考えやすく便利ではあるが，あまり数学的ではないので，拡大解釈しすぎると危険である．

次に，この正準形式を使って量子化を考えるのだが，我々のこれまでの文脈で言えば量子化するということは，H や H' を作用素におきかえることではなく，ハミルトン関数のなすポアソン環を $*$-積を持つ非可換環におきかえることであった．これはどうすれば良いのであろうか？　この問題を次節以降で考えていこう．

2° 無限次元ハミルトン系

(A)　前節の最後に述べた問題を考えるには「密度関数を持つ」$\boldsymbol{E}^2$ 上の関数全体をポアソン環にすることがまず必要である．しかし「密度関数を持つ」ということが積や $\{\ ,\ \}$ を考えるとあいまいになってくるので，その辺の枠をまず押えねばならない．さらに，こういうものができたとして，$H,\ H'$ に対して $H*H'$ を定義するには，結局

$$(1)\quad H*H' = H\exp\frac{\nu}{2}\int\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}\right)dV_x H'$$

とするのであるから，$\{H,\ H'\}$ が定義できるだけではだめで

$$(2)\quad \int_N\cdots\int_N \frac{\delta^l H}{\delta\pi(x_1)\cdots\delta\pi(x_l)}\cdot\frac{\delta^l H'}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_l)}dV_{x_1}\cdots dV_{x_l}$$

などがすべての $l\geqq 0$ で定義されていないと困る．ところが

（3）　$(d_1^l H)(\pi, \varphi)(\eta_1, \cdots, \eta_l)$

$$= \int_N \cdots \int_N \frac{\delta^l H}{\delta\pi(x_1)\cdots\delta\pi(x_l)} \eta_1(x_1)\cdots\eta_l(x_l)\, dV_{x_1}\cdots dV_{x_l}$$

によって H の高階偏微分 $\dfrac{\delta^l H}{\delta\pi(x_1)\cdots\delta\pi(x_l)}$ が定義されるのだから，H が密度関数を持っていても $l \geqq 2$ では一般には N^l 上の超関数となり，$l=0, 1$ を除くと (2) は意味を持たなくなるという悩みがある．これを考慮して扱う関数の範囲を上手にしぼり込む必要がある．

まず $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E}$ を 2 つの $\boldsymbol{E}$ の直積と見ないで，1 つの線形空間と見る．(π, φ) の方もまとめて ψ と書く．$\boldsymbol{E}^* \oplus \boldsymbol{E}^* = (\boldsymbol{E}^2)^*$ に注意して，次のような定義をする：

定義　$\boldsymbol{E}^2$ 上の C^∞ 級関数 $H(\psi)$ が **1-正規，半正規，全正規** であるとは，各 $\psi \in \boldsymbol{E}^2$ において，任意の $l \geqq 1$ について

$$(d^l H)(\psi):\ \boldsymbol{E}^2 \times \cdots \times \boldsymbol{E}^2 \to \boldsymbol{R} \qquad （対称 l 重線形）$$

が，それぞれ次のように拡張できる場合を言う：

$$(d^l H)(\psi):\ \boldsymbol{E}^{2*} \times \boldsymbol{E}^2 \times \cdots \times \boldsymbol{E}^2 \to \boldsymbol{R} \qquad （1\text{-}正規）$$

$$(d^l H)(\psi):\ \underbrace{\boldsymbol{E}^{2*} \times \cdots \times \boldsymbol{E}^{2*}}_{p} \times \underbrace{\boldsymbol{E}^2 \times \cdots \times \boldsymbol{E}^2}_{q} \to \boldsymbol{R},\ 2p \geqq l \quad （半正規）$$

$$(d^l H)(\psi):\ \boldsymbol{E}^{2*} \times \cdots \times \boldsymbol{E}^{2*} \to \boldsymbol{R} \qquad （全正規）$$

$u_1, \cdots, u_k \in \boldsymbol{E}^2$ とし，$H(\psi) = \langle u_1, \psi\rangle^{m_1} \langle u_2, \psi\rangle^{m_2} \cdots \langle u_k, \psi\rangle^{m_k}$ とすれば，$H(\psi)$ は全正規関数である．また，

（4）　$$H(\psi) = \int_N \mathscr{H}(\psi(x), d\psi(x), \cdots, (d^m\psi)(x))\, dV_x$$

のように密度関数 $\mathscr{H}$（C^∞ 級）を用いて書かれているものは 1-正規である．この場合，$\mathscr{H}$ が

$$\mathscr{H} = \psi(x)^2 + \langle d\psi(x), d\psi(x)\rangle + \cdots + \langle d^l\psi(x), d^l\psi(x)\rangle$$

のように，$\psi(x)$ に関して，2 次式になっていれば，H の 3 階以上の微分は消えるから，半正規関数となる．

$$H = \int_N \psi(x)^3 \, dV_x \tag{5}$$

は 1-正規ではあるが半正規ではない．

上の定義では $(\boldsymbol{E}^2, (\boldsymbol{E}^0)^2, \boldsymbol{E}^{2*})$ のみが使われているから，どの N で考えているかということは問題でない．それにもかかわらず次の補題が成立している：

補題 $\boldsymbol{E} = C^\infty(N)$, $E^0 = L_2(N)$ とすると，写像 $x \mapsto \delta_x$ によって N 自身は $\boldsymbol{E}^*$ の中に C^∞ 級に埋込まれている．

証明 これは ILH-鎖 $\{ L_2^s(N) ; s \in \boldsymbol{Z} \}$ を使う．$s_0 = \left[\frac{1}{2} \dim N \right] + 1$ とすると，$\delta_x \in L_2^{-s}(N)$，$s \geqq s_0$，であることに注意し，

$$L_2^s(N) \subset C^{s-s_0}(N) \qquad \text{（ソボレフの補題）}$$

に注意すると，任意の $u \in L_2^s(N)$ に対し，$\langle u, \delta_x \rangle_0 = u(x)$ は x に関して C^{s-s_0} 級であることがわかる．これは，写像 $x \mapsto \delta_x$ を N から $L_2^{-s}(N)$ への写像と見れば C^{s-s_0} 級であることを意味するが，$\boldsymbol{E}^* = \bigcup_s L_2^s(N)$ であるから $\boldsymbol{E}^*$ への写像と見れば C^∞ 級である．埋込みになっているのは容易にわかる．□

$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ を $\boldsymbol{E}^2$ 上の C^∞ 級関数で 1-正規なものの全体とする．前補題を使って次を示そう：

定理 1 $\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ は通常の積と $\{\ ,\ \}$ に関してポアソン環となる．

証明 $d(H \cdot H')(\psi)(\eta) = (dH)(\psi)(\eta)H' + H \cdot (dH')(\psi)(\eta)$ などの等式を使えば，$H, H' \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ のとき $H \cdot H' \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ は明らか．

$$\{H, H'\} = \int_N \left(\frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \cdot \frac{\delta H'}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta H}{\delta\pi(x)} \cdot \frac{\delta H'}{\delta\varphi(x)} \right) dV_x$$

であるが，前補題より，$\dfrac{\delta H}{\delta\varphi(x)} = (d_2 H)(\pi, \varphi)(\delta_x)$ などは x に関して C^∞ である．一般に $f \in C^\infty(N)$ に対して，

$$f = \int_N f(x) \, \delta_x \, dV_x$$

だから

$$(d_2H)(\pi,\ \varphi)(f) = \int_N \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} f(x)\, dV_x$$

であることを使うと，

$$\{H,\ H'\} = (d_2H)(\pi,\ \varphi)\left(\frac{\delta H'}{\delta\pi(\cdot)}\right) - (d_2H')(\pi,\ \varphi)\left(\frac{\delta H}{\delta\pi(\cdot)}\right)$$

であり，これは $\dfrac{\delta H}{\delta\varphi(\cdot)}$ の方を C^∞ 関数と思って書くこともできる．したがって，

$$(d_1d_2H)(\pi,\ \varphi)\left(\delta_x,\ \frac{\delta H'}{\delta\pi(\cdot)}\right), \qquad (d_2{}^2H)(\pi,\ \varphi)\left(\delta_x,\ \frac{\delta H'}{\delta\pi(\cdot)}\right)$$

が N 上の C^∞ 関数として意味を持ち，

$$\frac{\delta}{\delta\pi(x)}(d_2H)(\pi,\ \varphi)\left(\frac{\delta H'}{\delta\pi(\cdot)}\right) = (d_1d_2H)(\pi,\ \varphi)\left(\delta_x,\ \frac{\delta H'}{\delta\pi(\cdot)}\right) + (d_1{}^2H')(\pi,\ \varphi)\left(\delta_x,\ \frac{\delta H}{\delta\varphi(\cdot)}\right)$$

などとなる．この式は，

$$\int_N \left(\frac{\delta^2 H}{\delta\pi(x)\,\delta\varphi(y)}\frac{\delta H'}{\delta\pi(y)} + \frac{\delta H}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta^2 H'}{\delta\pi(x)\,\delta\pi(y)}\right) dV_y$$

と書いた方が理解しやすいが，被積分関数が独立して C^∞ 関数として意味を持つわけではないので注意が要る．

しかし，ともかく上のことより，

$$d_1\{H,\ H'\}(\pi,\ \varphi),\ \ d_2\{H,\ H'\}(\pi,\ \varphi):\ \ \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$$

が $\boldsymbol{E}^*$ まで拡張できることがわかり，これより $\{H,\ H'\} \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ がわかる．

ヤコビの恒等式を示すには，上のような書き方で，

$$\begin{aligned}\{H,\ \{H',\ H''\}\} &= \int_N\int_N \Biggl\{ \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta\pi(x)}\left(\frac{\delta H'}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta H''}{\delta\pi(y)} - \frac{\delta H'}{\delta\pi(y)}\frac{\delta H''}{\delta\varphi(y)}\right) \\ &\quad - \frac{\delta H}{\delta\pi(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta H'}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta H''}{\delta\pi(y)} - \frac{\delta H'}{\delta\pi(y)}\frac{\delta H''}{\delta\varphi(y)}\right)\Biggr\} dV_x dV_y\end{aligned}$$

と書けることを使えば良い． □

$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ はポアソン環となったわけだが，上の証明を見れば，多様体 N をきめておく必要が全くないことがわかる．N をきめるということは，いわば $\boldsymbol{E}^2$ 上の正準座標系を指定するということであって，正準座標系のとり方は無

数にある方が自然である．

また，前節の最後に述べた量子化の問題とは，一応 $\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に＊-積を定義せよという問題であると解釈できるが，$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ では (2) 式のようなものは，$\{\ ,\ \}$ を 1°，(12) で与えている限りうまく定義できない．

(**B**)　これまでは，$\boldsymbol{E}^2$ 上で定義された関数にポアソン構造を 1°，(12) で入れたものばかりを考えてきたが，ポアソン構造というものは 1°，(12) ときまっているわけではないから，別の様々なものが考えられる．

一例として $S^1=\{e^{i\theta};\ \theta\in\boldsymbol{R}\}$ とし，$\boldsymbol{E}=C^\infty(S^1)$，$E^0=L_2(S^1)$ とし，$\boldsymbol{E}$ 自身をこれまでの $\boldsymbol{E}^2$ のごとく考えてみよう．$\boldsymbol{E}^*$ を $\boldsymbol{E}$ の相対空間としておけば，$\boldsymbol{E}$ 上の C^∞ 級関数について，1-正規，半正規，全正規といった概念は全く同じ定義で定められる．2 つの C^∞ 級関数 $H(\psi)$，$H'(\psi)$ に対し，$\{\ ,\ \}$ を

$$\{H,\ H'\}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta H}{\delta\psi(\theta)}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\delta H'}{\delta\psi(\theta)}\right)d\theta \tag{6}$$

と定義する．

定理 2　$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ は上の $\{\ ,\ \}$ でポアソン環となる．

証明　部分積分により $\{H,\ H'\}=-\{H',\ H\}$ は自明，また，$H,\ H'\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ のとき，$H\cdot H'\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ は容易である．

$\{H,\ H'\}\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ を示そう．そのために，

$$\{H,\ H'\}=(dH)(\psi)\left(\frac{d}{d\theta}\frac{\delta H'}{\delta\psi(\cdot)}\right)=-(dH')(\psi)\left(\frac{d}{d\theta}\frac{\delta H}{\delta\psi(\cdot)}\right)$$

と書いておく．$(d\{H,\ H'\})(\psi):\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{E}^*$ まで拡張できることを調べるのだが，これを上の式を使って計算するときに，H を微分しているときと，H' を微分しているときとで使う式を変えると良い．結果は，

$$\begin{aligned}&d\{H,\ H'\}(\psi)(\eta)\\&\quad=(d^2H)(\psi)\left(\eta,\ \frac{d}{d\theta}\frac{\delta H'}{\delta\psi(\cdot)}\right)-(d^2H')(\psi)\left(\eta,\ \frac{d}{d\theta}\frac{\delta H}{\delta\psi(\cdot)}\right)\end{aligned}$$

となり，θ に関して C^∞ 関数となる．これより $\eta \in \boldsymbol{E}^*$ としても上の式は意味を持つことがわかる．$d^{\iota}\{H, H'\}(\psi)$ についても同様で，これより $\{H, H'\} \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ がわかる．

ヤコビ恒等式は，積分記号下の計算で，

$$2\{\{H, H'\}, H''\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 H}{\delta\psi(\theta')\delta\psi(\theta)} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\delta H'}{\delta\psi(\theta)}\right)\frac{d}{d\theta'}\left(\frac{\delta H''}{\delta\psi(\theta')}\right)d\theta\, d\theta'$$
$$- \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\delta H}{\delta\psi(\theta)}\right)\frac{\delta^2 H'}{\delta\psi(\theta')\delta\psi(\theta)}\frac{d}{d\theta'}\left(\frac{\delta H''}{\delta\psi(\theta')}\right)d\theta\, d\theta'$$

を示すことで得られる．□

上の $\{\ ,\ \}$ では正準座標系にあたるものが何であるのかすぐには見えないが，$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ を，

$$\mathrm{Cos}(\boldsymbol{E}) = \left\{ H \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})\,;\, \frac{\delta H}{\delta\psi(\theta)} = \frac{\delta H}{\delta\psi(-\theta)} \right\}$$

$$\mathrm{Sin}(\boldsymbol{E}) = \left\{ H \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})\,;\, \frac{\delta H}{\delta\psi(\theta)} = -\frac{\delta H}{\delta\psi(-\theta)} \right\}$$

の直和に分解すると，

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{Cos}(\boldsymbol{E}) \subset \mathrm{Sin}(\boldsymbol{E}), \qquad \frac{d}{d\theta}\mathrm{Sin}(\boldsymbol{E}) \subset \mathrm{Cos}(\boldsymbol{E})$$

となることと，対称性だけから

$$\{\mathrm{Cos}(\boldsymbol{E}),\ \mathrm{Cos}(\boldsymbol{E})\} = \{\mathrm{Sin}(\boldsymbol{E}),\ \mathrm{Sin}(\boldsymbol{E})\} = \{0\}$$

がわかる．さらに，全正規関数 $\boldsymbol{e}_m$, $\boldsymbol{f}_n$ ($m \geqq 0$, $n \geqq 1$) を

$$\boldsymbol{e}_m(\psi) = \langle\psi, \cos m\theta\rangle_0, \qquad \boldsymbol{f}_n(\psi) = \langle\psi, \sin n\theta\rangle_0$$

とすると，$\boldsymbol{e}_m \in \mathrm{Cos}(\boldsymbol{E})$，$\boldsymbol{f}_n \in \mathrm{Sin}(\boldsymbol{E})$ であり，

(7)　$\{\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_n\} = \{\boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{f}_n\} = 0$，　$\{\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{f}_n\} = -\delta_{m,n}$，　$\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{f}_n\} = 0$

となり，$\{\ ,\ \}$ はシンプレクティック形式と呼んでも良いものだということもわかる．

$x_m = \langle\psi, \cos m\theta\rangle_0$，$y_m = \langle\psi, \sin m\theta\rangle_0$ とおけば，

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin m\theta$$

であり，ψ が E^0 内を動きまわっているということは，

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n{}^2 < \infty$$

ということであり，$\boldsymbol{E}$ 内を動きまわっているというのは任意の $s \in \boldsymbol{R}$ に対して次が成立するということである：

$$\sum_{m=0}^{\infty} (1+m^2)^s x_m{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^s y_n{}^2 < \infty .$$

H が $\boldsymbol{E}$ 上の C^∞ 級関数ということは，$H = H(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots)$ が，任意有限個の $(x_1, y_1, \cdots, x_k, y_k)$ について C^∞ 級であることも意味するが，これよりは少し強い．H が 1-正規とか半正規というのは偏微分係数で作る列

$$\frac{\partial^{p+q} H}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p} \partial y_{j_1} \cdots \partial y_{j_q}} \qquad (i_1, \cdots, i_p, i_1, \cdots, i_q \in \text{自然数})$$

の増大度に関する条件になっている*)．$\{H, H'\}$ はこの書き方では (7) より次のようになることが容易にわかる．

$$(8) \qquad \{H, H'\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H'}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H'}{\partial x_i} \right).$$

(**C**) 最後に，ハミルトン関数の一例として

$$(9) \qquad H_0(\psi) = \int_0^{2\pi} \left(\psi(\theta)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\theta} \psi \right)^2 \right) d\theta$$

をとり，H_0 が定める正準方程式を書いてみよう．H_0 は S^1 上で書かねばならない理由はないが，H_0 が与えられればそれをどの正準座標系で表示するのが最も良いかということは自然にきまってくるようにも思われる．

ポアソンの正準方程式は $\tilde{H} \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E})$ の時間変化として

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{H} = \{\tilde{H}, H_0\}$$

で与えられる．そこで，任意の $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$ に対し，全正規関数 $\tilde{H}(\psi) = \langle \boldsymbol{u}, \psi \rangle_0$ をとり，ψ が動くものと考えると (10) は

---

*) 次節参照．

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \psi\rangle_0 = \{\langle u,\ \psi\rangle_0,\ H_0\} \tag{11}$$

となる．

$$\{\langle u,\ \psi\rangle_0,\ H_0\} = \int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{d}{d\theta}(3\psi(\theta)^2 - \psi_{\theta\theta}(\theta))\,d\theta$$

であり，

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \psi\rangle_0 = \int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\theta)\,d\theta$$

だから，ハミルトンの正準方程式にあたるものは，

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = 6\psi\psi_\theta - \psi_{\theta\theta\theta} \tag{12}$$

となる．これは KdV（Korteweg-de Vries）方程式として知られているものである．

このように個々のハミルトン関数や正準方程式を扱うときにはどの多様体（正準座標系）を使うべきか割とはっきりしている．しかし，(12) の解法を論じ始めると話は別で，S^1 上の関数という意味を離れてもっと自由に変換（正準座標系のとり直し）を行う*)．

前節の N を「時空」だと理解してきた者にとっては，ここに至って「時空」が完全に空中分解していることに気付くであろう．一体，我々の素朴な時空は何なのだろう．どこかに，ハミルトン関数の族があって，その族が自然に指定する多様体が時空多様体だということになるのだろうか？

3° 無限生成のワイル代数

可換環の変形という立場で「場」を量子化するというのは，$\mathfrak{N}_\Gamma^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ のよ

*）　田中，伊達著，KdV 方程式，紀伊國屋数学叢書 16，参照．

うな所に$*$-積を定義することだと一応は解釈してきたのであるが，実際には$*$-積が定義できる範囲は限られており，$*$-積に関して閉じた代数をなしている部分は半正規関数全体より，もう少し小さい所にある．$\int\varphi^2 dV_x$, $\int\pi^2 dV_x$ は半正規であるが，$\int\varphi^2 dV_x * \int\pi^2 dV_x$ などは（ν^2 の項で発散してしまうので）定義できないのである*)．

$\mathfrak{N}_{\Omega}^{\infty}(\boldsymbol{E}^2)$ を全正規関数全体とすると，この節で示されるようにこれは$*$-積で閉じている．これがいわばワイル関数環なのであって，今のところ取扱えるのは，$\mathfrak{N}_{\Omega}^{\infty}(\boldsymbol{E}^2)$ 上に ν-微分を引起しているようなハミルトン関数のみである．したがって，KdV 方程式の量子化といったものは取扱えない．

$\boldsymbol{N}$ を自然数全体とし，集合 $\{\boldsymbol{e}_n;\ n\in\boldsymbol{N}\}$ を考える．$\boldsymbol{R}$ 上で形式的級数 $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n\boldsymbol{e}_n$, $a_n\in\boldsymbol{R}$, を考え，任意の $s\in\boldsymbol{Z}$ に対してヒルベルト空間 E^s を

$$(1)\qquad E^s=\left\{\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n\boldsymbol{e}_n;\ \sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n{}^2 n^{\frac{2s}{d}}<\infty\right\}\qquad (d>0)$$

によって定義する**)．数列 $\{n^{\frac{1}{2d}}\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は，実は，d-次元コンパクト C^∞ リーマン多様体上のラプラシアン Δ の固有値の列 $\{\lambda_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ と同程度の増大度を持つので，d を次元と呼んでおこう．

内積は，$u=\sum a_n\boldsymbol{e}_n$, $v=\sum b_n\boldsymbol{e}_n$ に対し

$$(2)\qquad \langle u,\ v\rangle_s=\sum_{n\in\boldsymbol{N}} a_n b_n n^{\frac{2s}{d}}$$

と定義し，$\|u\|_s{}^2=\langle u,\ u\rangle_s$ で E^s 上のノルムとする．さらに，

$$(3)\qquad \boldsymbol{E}=\bigcap_s E^s,\qquad \boldsymbol{E}^*=\bigcup_s E^s$$

とする．すぐわかるように E^s の，$\langle\ ,\ \rangle_0$ に関する相対空間は E^{-s} であり，$\boldsymbol{E}^{**}=\boldsymbol{E}$ である．

$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{E}$ とし，基底を $\boldsymbol{Z}-\{0\}$（$=\boldsymbol{Z}_*$）を添字に使って

---

*) これは，使っている｛ , ｝の定義にもよることである．**5°**，(**A**) 参照．

**) $\{E^s;\ s\in\boldsymbol{Z}\}$ のことを ILH-鎖と呼んでおこう．

$$\cdots,\ \boldsymbol{e}_{-n},\ \boldsymbol{e}_{-n+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{-1},\ \boldsymbol{e}_{1},\ \boldsymbol{e}_{2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{n},\ \cdots$$

のように書いておこう．ψ を $\boldsymbol{E}^2$ 内を動きまわる変数とし，$z_m=\langle\psi,\ \boldsymbol{e}_m\rangle_0,\ m\in\boldsymbol{Z}_*$ とすれば，$\psi=\sum_{m\in\boldsymbol{Z}_*}z_m\boldsymbol{e}_m$ と書ける．

$\boldsymbol{E}^2$ 上の関数 $H(\psi)=H(\cdots,\ z_{-2},\ z_{-1},\ z_1,\ z_2,\ \cdots)$ が **1°** で定義した意味で C^∞ 級ということは，任意の $k\in\boldsymbol{N}$，任意の $(i_1,\ \cdots,\ i_k)\in\boldsymbol{Z}_*{}^k$ に対して，

$$\frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1}\partial z_{i_2}\cdots\partial z_{i_k}}(\psi)$$

が ψ に関して連続で，かつ十分大きな $s=s(k)$ に対して

$$(4)\qquad \sum_{(i_1,\ \cdots,\ i_k)\in\boldsymbol{Z}_*{}^k}\left|\frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}(\psi)\right|^2|i_1|^{-\frac{2s}{d}}\cdots|i_k|^{-\frac{2s}{d}}<\infty$$

となることに他ならない．また，$H\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ (1-正規) ということは，H が C^∞ 級であるだけでなく，(4) の部分が次のように強くなることと同値である：

$s_0=s_0(H,\ k)$ があって，任意の $s\geqq s_0$ に対して $s'=s'(s)$ をうまく選ぶと，

$$(5)\qquad \sum_{(i_1,\ \cdots,\ i_k)\in\boldsymbol{Z}_*{}^k}\left|\frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}(\psi)\right|^2|i_1|^{\frac{2s}{d}}|i_2|^{-\frac{2s'}{d}}\cdots|i_k|^{-\frac{2s'}{d}}<\infty$$

となるようにできる．

一般に，(5) において $s=s'$ とすることはできないので注意を要する．

$\mathfrak{N}_{hf}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ をそれぞれ半正規関数，全正規関数の全体とする．さらに $C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ を $\boldsymbol{E}^2$ 上の C^∞ 関数全体とする．以後，$\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ の方を主に使うが，$H\in\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ ということは，(4) の部分が次のように強くなることと同値である：

$s_0=s_0(H,\ k)$ があって，任意の $s\geqq s_0$ に対して

$$(6)\qquad \sum_{(i_1,\ \cdots,\ i_k)\in\boldsymbol{Z}_*{}^k}\left|\frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_k}}(\psi)\right|^2|i_1|^{\frac{2s}{d}}\cdots|i_k|^{\frac{2s}{d}}<\infty.$$

さて，$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ の元 $H,\ H'$ に対して

$$(7)\qquad \{H,\ H'\}=\sum_{i\in\boldsymbol{N}}\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\frac{\partial H'}{\partial z_{-i}}-\frac{\partial H}{\partial z_{-i}}\frac{\partial H'}{\partial z_i}\right)$$

と定義しよう．$H, H' \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ だけだと (7) は発散してしまうが，$H, H' \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ のときには収束し，$\{H, H'\} \in \mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ となる．(しかし，$\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ は $*$-積で閉じるようにはできない．)

$*$-積を定義する準備として，まず次を示そう：

補題 1 $H \in \mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$H' \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ のとき，任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して次が成立する：

$$\sum_{(i_1, \cdots, i_k) \in \boldsymbol{Z}_*{}^k} \frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} \frac{\partial^k H'}{\partial z_{-i_1} \cdots \partial z_{-i_k}} \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$$

証明 (6) は $W = \sum_{(i_1, \cdots, i_k) \in \boldsymbol{Z}_*{}^k} \frac{\partial^k H}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}} \boldsymbol{e}_{-i_1} \odot \cdots \odot \boldsymbol{e}_{-i_k} \in \boldsymbol{E}^2 \odot \cdots \odot \boldsymbol{E}^2$ を意味する．ただし $\odot$ は対称テンソル積を意味する．したがって，与式は，$(d^k H')(\psi)(W)$ と書くことができる．$H' \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ だからこの式には意味がある．$(d^k H')(\cdot)(W) \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ は容易にわかる．□

$C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2) = \boldsymbol{R}[\![\nu]\!] \otimes C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$\mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2) = \boldsymbol{R}[\![\nu]\!] \otimes \mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ などとし，$H \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$H' \in C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に対し，$H * H'$ を

(8) $$H * H' = H e^{\frac{\nu}{2}\sum_{i \in N}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z_{-i}} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z_i} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z_{-i}}\right)} H'$$

と定義しよう．前補題によりこの定義は意味を持ち，しかも $H * H' \in C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ となる．これは，$H' * H$ についても全く同様である．また，$H, H' \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ ならば $H * H' \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ であることも容易にわかる．

定理 1 $H \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$H' \in C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，またはこれの入れかえの場合に $H * H'$ が定義され，$H * H' \in C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ となる．$H, H' \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ ならば $H * H' \in \mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ である．また $*$-積は両辺が定義できておれば結合律をみたす．

証明 結合律のみ示す．ψ を $\boldsymbol{z} = (\cdots, z_{-2}, z_{-1}, z_1, z_2, \cdots)$ と書き $H(\psi)$ を $H(\boldsymbol{z})$ などと書けば，$*$-積の定義は，

(9) $$(H * H')(\boldsymbol{z}) = \exp \frac{\nu}{2} \sum_{i \in \boldsymbol{Z}_*} \frac{i}{|i|} \partial_{z'_{-i}} \partial_{z''_i} H(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}') H'(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'')\Big|_{\boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'' = 0}$$

と書いても良い．したがって，$H*(H'*H'')$ は

$$\exp\frac{\nu}{2}\left(\sum\frac{i}{|i|}\partial_{z'_{-i}}\partial_{z''_i}+\sum\frac{j}{|j|}\partial_{x'_{-j}}\partial_{x''_j}\right)\times$$
$$H(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}')H'(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{x}')H''(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{x}'')|_{z',\,z'',\,x',\,x''=0}$$

となる．これを **上手に** 変数変換すると，

$$\exp\frac{\nu}{2}\left(\sum\frac{i}{|i|}\partial_{x'_{-i}}\partial_{y'_i}+\sum\frac{j}{|j|}\partial_{x'_{-j}}\partial_{z'_j}+\sum\frac{k}{|k|}\partial_{y'_{-k}}\partial_{z'_k}\right)\times$$
$$H(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}')H'(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}')H''(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}')|_{x',\,y',\,z'=0}$$

となる．同様に $(H*H')*H''$ の方も書いて，変数変換を行うと，上と同じ式が得られる． □

次に，$H, H'\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ だと $H*H'$ が発散してしまう例を与えておこう．$H(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{\infty}z_i{}^2$, $H'(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{\infty}z_{-i}{}^2$ とすると，$H, H'\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ であることは $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{E}$ と (5) を使って容易にわかる．ところが，$*$-積の計算は次のようになって発散する：

$$H'\left(\sum_{j\in\boldsymbol{Z}_*}\frac{j}{|j|}\overleftarrow{\partial}_{z_{-j}}\overrightarrow{\partial}_{z_j}\right)^2H=\sum_{i,j=1}^{\infty}\delta_i^j\delta_j^i=\infty\,.$$

上の定理から，$(\mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ が結合律をみたす代数で，$(\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ \cdot,\ \{\ ,\ \})$ の変形になっていることがわかる．そこで，原点 $\psi=0$ における $(\mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ の無限小部分として定義される代数を **無限生成のワイル代数** と呼ぶが，これの定義や性質はあらためて書かなくても，もはや想像がつくであろう．

これまでは $\boldsymbol{E}$ を数列空間として話をして来たから，今度はこれを d-次元コンパクト C^∞ リーマン多様体 N の上に移してみよう．$\{\boldsymbol{e}_n(\cdot)\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ を N 上ラプラシアン Δ の正規化された固有関数の列とする．$i(\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_n(\cdot)$, $n\in\boldsymbol{N}$, とすると，i は自然に E^0 から $L_2(N)$ の上への線形等長写像を定義するが，数列 $\{n^{\frac{1}{2d}}\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ の選び方より，$i(\boldsymbol{E})=C^\infty(N)$, $i(\boldsymbol{E}^*)=C^\infty(N)^*$（実はもっと強く $i(E^s)=L_2{}^s(N)$, $s\in\boldsymbol{Z}$）となることが知られている．

$\boldsymbol{E}^2$ と $C^\infty(N)^2$ との対応を明確にするため，$\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{E}$ の基底を $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}_*}$ と

し，それに合わせて $C^\infty(N)^2$ の方の基底も，$\{\boldsymbol{e}_n(\cdot)\}_{n\in \boldsymbol{Z}_*}$ としておく，$\boldsymbol{e}_n(\cdot)$ と $\boldsymbol{e}_{-n}(\cdot)$ は N 上の関数としては同じもので，同じものを2つ考え，記号で区別したまでである．次に，J：$\boldsymbol{E}^2\to\boldsymbol{E}^2$ を

(10) $$J(\boldsymbol{e}_n)=-\boldsymbol{e}_{-n},\qquad J(\boldsymbol{e}_{-n})=\boldsymbol{e}_n\qquad (n\in\boldsymbol{N})$$

によって定義すると，これは，線形等長写像 J：$\boldsymbol{E}^0\oplus\boldsymbol{E}^0\to E^0\oplus E^0$ に自然に広げられる．この J は，引戻し写像

$$(J^*H)(\pi,\ \varphi)=H(J(\pi,\ \varphi))$$

として当然 $C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に作用するが，容易に，

(11) $$J^*C^\infty(\boldsymbol{E}^2)=C^\infty(\boldsymbol{E}^2),\qquad J^*\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)=\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2),$$
$$J^*\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)=\mathfrak{N}_\Omega^\infty(\boldsymbol{E}^2)$$

が得られる．

さて，$\psi=(\pi,\ \varphi)$ を $\boldsymbol{E}^2$ 内に固定し，$\boldsymbol{E}^2\times\boldsymbol{E}^2$ 上の双線形関数

(12) $$B(\tilde{u},\ \tilde{v})=dH(\psi)(\tilde{u})\cdot dH'(\psi)(J\tilde{v}),\qquad \tilde{u},\ \tilde{v}\in\boldsymbol{E}^2$$

を考えてみよう．ただし $H,\ H'\in\mathfrak{N}_1^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ とする．この条件の下では，$dH(\psi)$，$dH'(\psi)$ は $\boldsymbol{E}^{**}=\boldsymbol{E}$ の元と思って良く，その意味で，

(13) $$\begin{aligned}B(\tilde{u},\ \tilde{v})&=\langle\tilde{u},\ dH(\psi)\rangle_0\cdot\langle\tilde{v},\ dH(\psi)\rangle_0\\&=\langle\tilde{u},\ \langle J\tilde{v},\ dH'(\psi)\rangle_0 dH(\psi)\rangle_0\end{aligned}$$

と書いて良い．$L(\tilde{v})=\langle J\tilde{v},\ dH'(\psi)\rangle_0 dH(\psi)$ とすれば，L は $\boldsymbol{E}^*$ から $\boldsymbol{E}$ への線形写像であり，跡（トレース）$\mathrm{tr}\,L$ が定義される．これは，計算すると

(14) $$\mathrm{tr}\,L=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}_*}\langle\boldsymbol{e}_n,\ L(\boldsymbol{e}_n)\rangle_0=\{H,\ H'\}(\psi)$$

となる．$\mathrm{tr}\,L$ の計算は，i によって $\boldsymbol{E}$ と $C^\infty(N)$ とを同一視し，N の全体積を1とすると，

(15) $$\mathrm{tr}\,L=\int_N\langle\delta_x,\ L(\delta_x)\rangle_0\,dV_x$$

となることが知られている．これを使うと，$\{H,\ H'\}(\psi)$ は

(16) $$\{H,\ H'\}=\int_N\left(\frac{\delta H}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta H'}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta H}{\delta\pi(x)}\frac{\delta H'}{\delta\varphi(x)}\right)dV_x$$

となることがわかる．これを使うと $*$-積は N 上では

$$H * H' = H\, e^{\frac{\nu}{2}\int_N \left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\pi(x)}\right) dV_x} H' \tag{17}$$

となるが，この場合は無論一方が $\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ の元であることが必要であり，そうであれば他方は $C_\nu^{\infty}(\boldsymbol{E}^2)$ であれば何でも良い．

4° Klein-Gordon（クライン・ゴルドン）場

前節で $\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ に $*$-積が定義されることがわかった．これはいわば，ワイル関数環のようなものであるが，場の理論の場合，KdV 方程式を導くような“面白い”ハミルトン関数は $\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ の中には入っていないという事情がある．

そこでどう考えれば良いかが問題となるのだが，ここでは $\boldsymbol{E} = C^{\infty}(N)$ とし，次のような $\boldsymbol{E}^2$ 上の関数 H_0 を例にとって考えてみよう：

$$H_0(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int_N \left(\pi(x)^2 + m^2\varphi(x)^2 + \langle d\varphi(x), d\varphi(x)\rangle \right) dV_x . \tag{1}$$

ただし，m は実定数，$\langle d\varphi(x), d\varphi(x)\rangle$ は N 上のリーマン計量による内積である．H_0 は密度関数を持っているから $\mathfrak{N}^{\infty}_{1}(\boldsymbol{E}^2)$ であるが，それより大きな特徴として

$$d^3 H_0 = 0 \tag{2}$$

ということが容易にわかる．H_0 は“2次関数”なのである．H_0 をハミルトン関数として正準方程式を作ると，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x) = \{\varphi(x), H_0\} & (= \pi(x)), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(x) = \{\pi(x), H_0\} & (= \Delta\varphi(x) - m^2\varphi(x)) \end{cases} \tag{3}$$

となる．無論，この式は，**2°**，(11) のようにして意味をつけて読むのである．(3) は **クライン・ゴルドンの方程式** と呼ばれている．

さて，この H_0 を $*$-積の立場で考え直すのだが，実は次の定理が成立する：

定理1 $H_0 \in \mathfrak{N}^{\infty}_{1,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ $(=\boldsymbol{R}[\![\nu]\!]\otimes\mathfrak{N}^{\infty}_{1}(\boldsymbol{E}^2))$ が $d^3H_0=0$ をみたせば，$\dfrac{1}{\nu}[H_0,\ \ ]$ は $(\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ 上の ν-微分を引起す．

証明 任意の $H\in\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ に対し $[H_0, H]=H_0*H-H*H_0$ は定義されており，$\nu C^{\infty}(\boldsymbol{E}^2)$ に入ることは容易にわかるから，$\dfrac{1}{\nu}[H_0, H]\in\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ を言えば十分である．

ところで，一般に

$$\frac{1}{\nu}[H_0, H]=-\{H_0, H\}+\nu^2P_3^-(H_0, H)+\nu^4P_5^-(H_0, H)+\cdots$$

の形であることは有限次元の場合の計算からわかるが今の場合 $d^3H_0=0$ だから ν^2 以下は消えていて，結局 $\{H_0, H\}\in\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ を示すだけで良いことがわかる．

ところが，$\{H_0, H\}$ の k 階微分 $d^k\{H_0, H\}(\psi)(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)$ は $d^3H_0=0$ を使うと，$\varepsilon(\cdot)$ を $\pi(\cdot)$ または $\varphi(\cdot)$ と適宜読むことにして，

$$\text{(a)}\qquad \int_N\cdots\int_N\frac{\delta H_0}{\delta\varepsilon(x)}\frac{\delta^{k+1}H}{\delta\varepsilon(x)\,\delta\varepsilon(y_1)\cdots\delta\varepsilon(y_k)}\eta_1(y_1)\cdots\eta_k(y_k)\,dV_x dV_{y_1}\cdots dV_{y_k},$$

$$\text{(b)}\qquad \int_N\cdots\int_N\frac{\delta^2 H_0}{\delta\varepsilon(x)\,\delta\varepsilon(y_1)}\frac{\delta^{k}H}{\delta\varepsilon(x)\,\delta\varepsilon(y_2)\cdots\delta\varepsilon(y_k)}\eta_1(y_1)\cdots\eta_k(y_k)\,dV_x dV_{y_1}\cdots dV_{y_k}$$

の有限和（差）で書けている．$H\in\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ だから，(a) において η_i を $\boldsymbol{E}^*$ の元にとれることは明らかである．(b) においては，

$$f(x)=\int_N\cdots\int_N\frac{\delta^k H}{\delta\varepsilon(x)\,\delta\varepsilon(y_2)\cdots\delta\varepsilon(y_k)}\eta_2(y_2)\cdots\eta_k(y_k)\,dV_{y_2}\cdots dV_{y_k}$$

は，$\eta_2, \cdots, \eta_k\in\boldsymbol{E}^*$ とおいてもなお，x に関して C^{∞} でありこれを使うと，

$$(d_i d_j H_0)(\pi, \varphi)(\eta_1, f)$$

と書ける．$H_0\in\mathfrak{N}^{\infty}_{1,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ だから $d^2H_0(\psi)(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ において $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ の一方は $\boldsymbol{E}^{2*}$ の元にできるのだから，$f\in\boldsymbol{E}$ より，$\eta_1\in\boldsymbol{E}^*$ とできる．したがって，$d^k\{H_0, H\}(\psi)$

は $\boldsymbol{E}^{2*}\times\cdots\times\boldsymbol{E}^{2*}$ まで拡張されることになり，$\{H_0, H\}\in\mathfrak{N}^{\infty}_{\mathfrak{L},\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ が示された．□

再び (1) で与えた H_0 に戻って，$\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(H_0)\left(=\dfrac{1}{\nu}[H_0,\ ]\right)$ を考えよう．これはワイル関数環に相当する $(\mathfrak{N}^{\infty}_{\mathfrak{L},\nu}(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ の ν-微分であるから，一種のベクトル場と見ることができる．この場合 $\Psi=(\pi,\ \varphi)$ がワイルの座標関数の集まり $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ のごとく考えられている．

そこで，任意の $u\in\boldsymbol{E}$ に対して $\langle u,\ \varphi\rangle_0$, $\langle u,\ \pi\rangle_0$ は $\mathfrak{N}^{\infty}_{\mathfrak{L},\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ の元であるから，$\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(H_0)$ なるベクトル場に乗って，$\psi=(\pi,\ \varphi)$ が流れたときに，$\langle u,\ \varphi\rangle_0$, $\langle u,\ \pi\rangle_0$ の時間変化を見ると，

(4)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \varphi\rangle_0=-\dfrac{1}{\nu}[\langle u,\ \varphi\rangle_0,\ H_0]\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \pi\rangle_0=-\dfrac{1}{\nu}[\langle u,\ \pi\rangle_0,\ H_0]\end{cases}$$

をみたすことがわかる．この場合，$\langle u,\ \varphi\rangle_0=\int_N u(x)\varphi(x)\,dV_x$ などと書き，u が任意であることを使うと，(4) は，

(5)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=-\dfrac{1}{\nu}[\varphi(x),\ H_0]\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(x)=-\dfrac{1}{\nu}[\pi(x),\ H_0]\end{cases}$$

と書いても良い．これが (3) を量子化した式であると考えられる．この場合 $\varphi(x)$ などは，$(\pi,\ \varphi)\mapsto\varphi(x)$ という関数と考えられていることは言うまでもあるまい．

ところで，$*$-積の公式を使って (4) の右辺を計算してみると，$\langle u,\ \varphi\rangle_0$, $\langle u,\ \pi\rangle_0$ が1次関数だから

$$-\frac{1}{\nu}[\langle u,\ \varphi\rangle_0,\ H_0]=\{\langle u,\ \varphi\rangle_0,\ H_0\}$$

$$-\frac{1}{\nu}[\langle u,\ \pi\rangle_0,\ H_0]=\{\langle u,\ \pi\rangle_0,\ H_0\}$$

となって，(5) は (3) と全く同じであることがわかる*)．これでは何もかも量子化する前と同じであると思われるかも知れないが，大きく変化したのは，$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(H_0)$ が ν-微分になっているということ，つまり，(5) の（したがって (3) の）解は $(\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2), *)$ 上の自己同形写像を引起すという所である．(3) と (5) が一致するのはハミルトン関数が 2 次式であるというところからきていて，同様のことは有限次元でも起っていたことを思い出してほしい．

次に，上の方で出てきた関数 $(\pi, \varphi) \mapsto \varphi(x)$，$(\pi, \varphi) \mapsto \pi(x)$ の性質を調べておこう．この場合 x は無論固定して考えねばならない．物理では上のような関数を「**場の演算子**」(field operators) と呼んで $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$ と書く習慣があるのでここでも同じ記号を用いるが，勝手に交換できない演算子と見てしまうと，例えば

$$\int_N (\hat{\varphi}(x)\hat{\pi}(x) - \hat{\pi}(x)\hat{\varphi}(x))\, dV_x$$

などは何のことだかわからなくなるので注意が要る．ここではあくまで $C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ の元として扱う．したがって，$\hat{\varphi}(x)\cdot\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(x)\cdot\hat{\varphi}(x) \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ であるが，$\hat{\varphi}(x) * \hat{\pi}(x)$ は定義されない．

定理 2 任意に固定した $x \in N$ で，$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\hat{\varphi}(x))$, $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\hat{\pi}(x))$ は $(\mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2), *)$ の ν-微分である．

証明 一方を証明すれば十分であろう．任意の $H \in \mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ に対して，

$$-\frac{1}{\nu}[\hat{\varphi}(x), H] = \frac{\delta H}{\delta\pi(x)}$$

であることは証明しなくて良いであろう．すると，x は固定したまま，右辺の高階微分にも意味が付き，$\frac{\delta H}{\delta\pi(x)} \in \mathfrak{N}^{\infty}_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ がわかる． □

---

*) ここでは，$\varphi(x)$, $\pi(x)$ を演算子だと思っているわけではなく，単に代数が変化しただけだと思っている．

上の定理より $\dfrac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\hat{\varphi}(x))$ が $\mathfrak{N}^{\infty}_{\mathfrak{L},\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ 上に引起す ν-同形写像の流れも考察の対象となる．定義から計算すると，

$$(6)\qquad \frac{\delta\hat{\varphi}(x)}{\delta\varphi(y)}=\delta_x \qquad ((d\hat{\varphi}(x))(\psi)(\eta)=\eta(x) \text{ だから })$$

だから，流れの微分方程式は，任意の $u\in\boldsymbol{E}$ に対し，

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \varphi\rangle=-\dfrac{1}{\nu}[\langle u,\ \varphi\rangle,\ \hat{\varphi}(x)]=0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\langle u,\ \pi\rangle=-\dfrac{1}{\nu}[\langle u,\ \pi\rangle,\ \hat{\varphi}(x)]=\displaystyle\int_N u(y)\,\delta_x(y)\,dV_y=u(x) \end{cases}$$

となる．これは，次のように書いても良い：

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(y)=0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(y)=\delta_x(y) \end{cases}$$

(7) は $\boldsymbol{E}^2$ 上での一種の平行移動を表わしている．

最後に，物理の教科書で良く見る交換関係式

$$(9)\qquad \begin{aligned} &[\hat{\varphi}(x),\ \hat{\varphi}(y)]=[\hat{\pi}(x),\ \hat{\pi}(y)]=0 \\ &[\hat{\varphi}(x),\ \hat{\pi}(y)]=-\nu\,\delta(x-y) \end{aligned}$$

はどのように解釈されるべきかを述べておこう．$\hat{\varphi}(x)*\hat{\pi}(y)$ などは定義されていないのだから，上を $*$-積による交換関係とそのまま思うことはできない．ところが，任意の $u\in\boldsymbol{E}$ に対して $[\langle u,\ \varphi\rangle,\ \hat{\pi}(x)]=\langle u,\ \varphi\rangle*\hat{\pi}(x)-\hat{\pi}(x)*\langle u,\ \varphi\rangle$ は定義できるから，それで計算すると，

$$(10)\qquad \begin{cases} [\langle u,\ \varphi\rangle,\ \hat{\varphi}(x)]=[\langle u,\ \pi\rangle,\ \hat{\pi}(x)]=0 \\ [\langle u,\ \varphi\rangle,\ \hat{\pi}(x)]=-\nu\,u(x) \end{cases}$$

となる．この他にも (9) の読み方は数学的に様々考えられるが，いずれにしろ (9) を額面どおりの演算子の交換関係だと思うと，x, y は止めて考えねばならなくなるから妙なことが起る．

しかし，上の話は ($\boldsymbol{E}^2$, $(E^0)^2$, $\boldsymbol{E}^{2*}$) さえ指定しておけば，どの N の上で

話をしているのかということは全く問題にならない．これでは我々の素朴な時空は空中分解したままで心もとない．もう少し安心できる考え方がほしいのだが，一体，我々の素朴な時空とは何なのだろう？　そして，時空内の１点とは何なのだろう？

5° 正準構造，複素構造，実部

（**A**）　まず，ポアソン括弧積の定義のされ方を反省してみよう．**1°** において，(12) によって $\{H, H'\}$ を定義したのはラグランジェ系との関係から見れば，これ以外にあり得ない正当なものであった．しかし，**2°** の (6) でわかるように，一度ハミルトン系の立場に立つと，$\{\ ,\ \}$ はかなり自由に定義しても良いことがわかる．さらに $*$-積までくると，要は $*$-積による計算ができれば良いわけで，リー環の展開環の例からもわかるように，正準座標系があからさまに見えている必要など全くないように思われる．このように考えて，$\{\ ,\ \}$ や $*$-積の定義を積極的に変更して，$*$-積の定義できる範囲を増やすことを考えよう．

記号は **3°**，**4°** と同じとする．$\lambda>0$ をパラメーターとする．$\boldsymbol{E}^*$ から $\boldsymbol{E}$ の中への連続線形写像の族 $\{L_\lambda\}_{\lambda>0}$ を，

$$(1)\qquad L_\lambda\Big(\sum_{n\in \boldsymbol{N}} a_n \boldsymbol{e}_n\Big) = \sum_{n\in \boldsymbol{N}} a_n e^{-\lambda n} \boldsymbol{e}_n$$

で定義する．$\boldsymbol{E}=C^\infty(N)$ のときには $e^{-\frac{\lambda}{a}\Delta}$ を L_λ としても良い．$L_\lambda \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_\lambda$ とすると，$L_\lambda\colon \boldsymbol{E}^*\to \boldsymbol{E}_\lambda$ は全単射であり，$\boldsymbol{E}_\lambda$ は $\boldsymbol{E}$ 内で稠密である．

任意の $H\in C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に対し，$(L_\lambda{}^*H)(\pi, \varphi) = H(L_\lambda\pi, L_\lambda\varphi)$ とおけば，$L_\lambda{}^*H$ は任意の $s\in \boldsymbol{R}$ について $(E^{-s})^2$ 上で C^∞ 級関数となる．この意味で $L_\lambda{}^*H\in C^\infty(\boldsymbol{E}^{2*})$ として良い．特に $L_\lambda{}^*H \in \mathfrak{N}^\infty_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2)$ となる．したがって，$*_\lambda$-積を $\boldsymbol{E}_\lambda{}^2$ 上の関数として

$$(2)\qquad H *_\lambda H' = L_\lambda^{-1*}((L_\lambda{}^*H) * (L_\lambda{}^*H'))$$

によって定義する．これは $H(\pi, \varphi) = H(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \cdots)$ と書くやり方では，

$$H *_\lambda H' = H \exp \sum_{m \in \boldsymbol{Z}_*} \left(\overleftarrow{\partial}_{x_m} \frac{m}{|m|} \frac{\nu}{2} e^{-2\lambda|m|} \overrightarrow{\partial}_{x_{-m}} \right) H' \tag{3}$$

と定義していることである．(2) の形から $*_\lambda$ が結合律をみたすことがわかり，(3) を使って，$H *_\lambda H'$ が $\boldsymbol{E}^2$ 上の関数として意味があり，$C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に属することなどがわかる．したがって，次の定理が得られた：

定理 1　$C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ $(= \boldsymbol{R}[\nu] \otimes C^\infty(\boldsymbol{E}^2))$ には $*_\lambda$ 積 $(\lambda > 0)$ が定義でき，これは可換環 $(C^\infty(\boldsymbol{E}^2), \cdot)$ の変形になっている．

無論，ポアソン括弧は，$\{\ ,\ \}$ から

$$\{H, H'\}_\lambda = H \sum_{m \in \boldsymbol{Z}_*} \left(\overleftarrow{\partial}_{x_m} \frac{\nu m}{2|m|} e^{-2\lambda|m|} \overrightarrow{\partial}_{x_{-m}} \right) H' \tag{4}$$

に変っている．しかも，$\boldsymbol{e}_m$ と $\boldsymbol{e}_{-m}$ とは $\{\ ,\ \}_\lambda$ に関しては正準共役ではない．したがって，$(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \cdots)$ は正準座標系ではなくなっている．しかし，(3) より，$m, n \geqq 1$ に対し，

$$[x_m, x_n]_\lambda = [x_{-m}, x_{-n}]_\lambda = 0, \qquad [x_m, x_{-n}]_\lambda = \nu\, \delta_{m,n} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\lambda m} \tag{5}$$

が成立する．

これを任意に選んだ N の上で言うと，$\{\varphi(x), \pi(x)\,;\, x \in N\}$ は $\{\ ,\ \}_\lambda$ に関しては正準座標系でなくなり，単に，

$$\begin{aligned} &[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)]_\lambda = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)]_\lambda = 0 \\ &[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)]_\lambda = \nu(L_\lambda \delta_x)(y) \end{aligned} \tag{6}$$

をみたす一般の座標系だということになる．とは言え (5)，(6) はまだ特殊な座標系であることを意味している．

上のような $*_\lambda$ 積は，$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)]_\lambda$ が $\nu \delta_x(y)$ ではないという理由によって場の理論の中では重視されないのであるが，この態度は“時空”なるものにかなりの先入観を持込んでいるように思われる．

(**B**) 次に，**3°**，(10) で使った J を使って $\boldsymbol{E}^2$ をケーラー多様体と見，$(C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ *_\lambda)$ または $(\mathfrak{N}^\infty_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ をケーラー・ワイル多様体上のワイル関数環と見ることを考えよう．これは物理の教科書では電磁場との相互作用を可能にさせるためだと説明されているが，その理由は次節以降で次第にはっきりするだろう．

2 章 **11°** でやったのと同様に，$\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ を積に関しての群とみなし，これを $\boldsymbol{E}^2$ に次式で作用させる：

$$(7)\qquad \rho(re^{i\theta})(\pi,\ \varphi) = (\pi,\ \varphi)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} r^{-1}$$

引戻し写像 $\rho(re^{i\theta})^*$ を使って，上の作用から $\boldsymbol{C}_*$ の $C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ への作用が得られるが，この作用も $*$ を取り払って $\rho(\cdot)$ と表わすことにする．$\rho(\boldsymbol{C}_*)$ は各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{Re}_{-n} \oplus \boldsymbol{Re}_n$ を不変にしているから，$\mathfrak{N}^\infty_1(\boldsymbol{E}^2)$，$\mathfrak{N}^\infty_\Omega(\boldsymbol{E}^2)$ を保つこと，及び $(C^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ \{\ ,\ \}_\lambda)$，$(\mathfrak{N}^\infty_1(\boldsymbol{E}^2),\ \{\ ,\ \})$ のポアソン自己同形写像を与えていることなどが容易にわかる．そこで

$$(8)\qquad \rho(re^{i\theta})\nu = r^2\nu$$

と定義しておくと，2 章 **11°** でやったのと同様にして，次のことがわかる：

定理 2 $\rho(re^{i\theta})$ は $(C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2),\ *_\lambda)$，$(\mathfrak{N}^\infty_{\Omega,\nu}(\boldsymbol{E}^2),\ *)$ への自己同形写像としての作用になっている．

$\boldsymbol{E}^{2*}$ は $\boldsymbol{E}^2$ 上の線形関数として $C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に入っているが，これは $\rho(\boldsymbol{C}_*)$ で不変な部分空間で，$\boldsymbol{E}^{2*}$ への $\boldsymbol{C}_*$ の作用は，

$$(9)\qquad \rho(re^{i\theta})\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{E}^*$$

で与えられていることが容易にわかる．そこで，$z = re^{i\theta}$ のとき，

$$z\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \rho(z)\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix},\ 0\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix},\ (z+z')\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} + z'\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

などと考えて，$\boldsymbol{E}^{2*}$ を複素線形空間とみなすことにする．$\boldsymbol{E}^{2*} \supset (E^0)^2 \supset \boldsymbol{E}^2$

であり，これらは $\rho(\boldsymbol{C}_*)$ で不変だから，上と同じ作用で複素線形部分空間と自然に考えられる．

（C） V が n 次元の複素線形空間だからといって，基底をきめなければ V を $\boldsymbol{C}^n$ と同一視することはできない．同様に $\boldsymbol{E}^{2*}$ が複素線形空間になっても，“基底”をきめなければ $\boldsymbol{E}^{2*}$ 上に複素座標系は持込めないし，したがって複素変数といった考え方も持込めない．第一，まだどの部分空間が実部であるかがきまっていない．

実部をきめるには，何が複素共役であるかをきめれば良いので，それを与える写像として $\dagger$: $\boldsymbol{E}^{2*}\to\boldsymbol{E}^{2*}$ なる次の性質を持った連続な実線形写像を考える：

（a） $\dagger\dagger=1$, $\quad J\dagger+\dagger J=0 \quad \left(ただし\ J=\left.\dfrac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}\rho(e^{i\theta})\right)$

（b） $\dagger\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}^2$, $\quad \dagger(E^0)^2=(E^0)^2$.

このような $\dagger$ は無数に存在する．

$\dagger^2=1$ だから $\dagger$ の固有値は ±1 であり，

$$\boldsymbol{E}^{2*}=\boldsymbol{F}_1{}^*\oplus\boldsymbol{F}_{-1}{}^*,\qquad \boldsymbol{F}_{-1}{}^*=J\boldsymbol{F}_1{}^* \tag{10}$$

と固有空間分解される．$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{E}^2\cap\boldsymbol{F}_1{}^*$, $F_1{}^0=(E^0)^2\cap\boldsymbol{F}_1{}^*$ とおけば，$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{F}_1\oplus J\boldsymbol{F}_1$, $(E^0)^2=F_1{}^0\oplus JF_1{}^0$ が成立する．$\boldsymbol{F}_1{}^*$ の元を**実元**，または**エルミート元**と呼ぶ．

$\boldsymbol{F}_1$ または $\boldsymbol{F}_1{}^*$ に実線形の座標系を導入し，$J=\sqrt{-1}$ と考えることにより $\boldsymbol{E}^2$ または $\boldsymbol{E}^{2*}$ に複素座標系が導入される．$\boldsymbol{F}_1{}^*$ に実線形座標系を入れるには，$F_1{}^0$ がヒルベルト空間になることを利用して，$\{\boldsymbol{e}'_m\}_{m\in\boldsymbol{N}}$ を $F_1{}^0$ の正規直交基底とし，任意の $\psi\in\boldsymbol{F}_1{}^*$ を $\psi=\sum_{m=1}^{\infty}x_m(\psi)\boldsymbol{e}_m$ と表示すれば良い．$\{x_m(\psi)\}_{m\in\boldsymbol{N}}$ が ψ の座標を表す．当然 $\psi+J\psi'$ の座標は $\{x_n(\psi)+\sqrt{-1}y_m(\psi')\}_{m\in\boldsymbol{N}}$, $y_m(\psi')=\langle\psi',\boldsymbol{e}'_m\rangle_0$, となる．$\boldsymbol{F}_1$ に実線形座標系を入れるには上の座標系をそのまま使っても良いが，勝手に d 次元コンパクト多様体

N を指定して，$\boldsymbol{F}_1 = C^\infty(N)$ と考え，

$$\psi = \int_N \psi(x)\,\delta_x\,dV_x$$

と考えても良い．$\psi(x) = \langle\psi,\ \delta_x\rangle_0$ と考えているわけである．

$\boldsymbol{F}_1 \oplus J\boldsymbol{F}_1$ の元 $\psi + J\psi'$ の座標は

$$\psi + J\psi' = \int_N (\langle\psi,\ \delta_x\rangle_0 + \sqrt{-1}\langle\psi',\ \delta_x\rangle_0)\,\delta_x\,dV_x \tag{11}$$

と考えて，$\{\psi(x) + \sqrt{-1}\psi'(x) : x \in N\}$ である．$\zeta(x) = \psi(x) + \sqrt{-1}\psi'(x)$ とおき，$\{\zeta(x)\,;\ x \in N\}$ を $\boldsymbol{F}_1 \oplus J\boldsymbol{F}_1$ の **複素座標系**，$\{\bar{\zeta}(x)\,;\ x \in N\}$ を **共役複素座標系** と呼ぶ．

複素座標系がきまれば，$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{F}_1 \oplus J\boldsymbol{F}_1$ の複素数値関数，つまり $C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C = \boldsymbol{C} \otimes C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ の元が正則関数であるとか，反正則関数（$\bar{\zeta}(x)$ だけの関数）という概念が確定する．

複素変数とか共役複素変数を使って書かれている関数の $*$-積，$*_\lambda$-積は次の定理で与えられる交換関係を使って計算される：

定理 3 $\hat{\zeta}(x)$, $\hat{\bar{\zeta}}(x)$ を複素数値関数 $\zeta \mapsto \zeta(x)$, $\zeta \mapsto \bar{\zeta}(x)$ とする．

（a） $[\hat{\zeta}(x),\ \hat{\zeta}(y)]_\lambda = [\hat{\bar{\zeta}}(x),\ \hat{\bar{\zeta}}(y)]_\lambda = 0$

（b） $[\hat{\zeta}(x),\ \hat{\zeta}(y)] = [\hat{\bar{\zeta}}(x),\ \hat{\bar{\zeta}}(y)] = 0$,

$[\hat{\zeta}(x),\ \hat{\bar{\zeta}}(y)] = 2\nu\sqrt{-1}\,\delta_y(x)$

証明 $\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E} \oplus \{0\}$, $\boldsymbol{E}_+ = \{0\} \oplus \boldsymbol{E}$ とすると，$\boldsymbol{E}_- = J\boldsymbol{E}_+$ であり $\boldsymbol{E}^2 = J\boldsymbol{E}_+ \oplus \boldsymbol{E}_+$ となることに注意する．$\boldsymbol{E}^2$ 上の内積は，$\langle(u,\ v),\ (u',\ v')\rangle_0 = \langle u,\ u'\rangle_0 + [v,\ v'\rangle_0$ で与えられており，これを $\boldsymbol{F}_1$ 上で考えることにより $\boldsymbol{F}_1$ 上の内積が得られている．

また，$(u,\ v)$ を $\boldsymbol{E}^2$ 上の線形関数と見たときの交換関係は $*$-積，$*_\lambda$-積に関してそれぞれ

$$\begin{cases} [(u,\ v),\ (u',\ v')] = \nu(\langle u,\ v'\rangle_0 - \langle v,\ u'\rangle_0) \\ [(u,\ v),\ (u',\ v')]_\lambda = \nu(\langle L_\lambda u,\ L_\lambda v'\rangle_0 - \langle L_\lambda v,\ L_\lambda u'\rangle_0) \end{cases} \tag{12}$$

で与えられる．

一方，少し複雑な計算だが，線形同形写像 $A: \boldsymbol{E}^2 \to \boldsymbol{E}^2$ で次の性質を持つものが作れる：

（i） A は $(E^0)^2$ から $(E^0)^2$ への等長写像に拡張できる．

（ii） $JA = AJ$,　$A\boldsymbol{E}_+ = \boldsymbol{F}_1$.

これより，容易に，$[A(u, v), A(u', v')] = [(u, v), (u', v')]$ が得られ，これを使うと (b) が得られる．

(a) の証明は2章 **10°** の定理1のそれと同じで，$[\hat{\xi}(x), \hat{\xi}(y)]_\lambda$ が J の $2\sqrt{-1}$ 固有ベクトルであること，$\boldsymbol{E}^2$ 上に作用する J の固有値は，実は $\pm\sqrt{-1}$ のみであることを使えば良い．　□

(D)　ついでに代数の方にもう少し深入りしておこう．(10) での分解 $\boldsymbol{E}^{2*} = \boldsymbol{F}_1{}^* \oplus J\boldsymbol{F}_1{}^*$ は † の固有空間分解だが，この † を $\boldsymbol{E}^{2*}$ の複素化 $\boldsymbol{E}^{2*}{}_C = \boldsymbol{E}^{2*} \oplus \sqrt{-1}\,\boldsymbol{E}^{2*}$（$= \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{E}^{2*}$）にまで拡張して考えよう．ただし，以下では † を必ずしも複素線形になるようには拡張しないから，区別の必要上 $\boldsymbol{E}^{2*}{}_C = \boldsymbol{E}^{2*} \oplus \boldsymbol{i}\boldsymbol{E}^{2*}$ と書き，これまでの J もそれに合わせて $\boldsymbol{j}$ と書くことにしよう．したがって，$\boldsymbol{E}^{2*}{}_C$ は次のように分解されている：

$$(13) \qquad \boldsymbol{E}^{2*}{}_C = \boldsymbol{F}_1{}^* \oplus \boldsymbol{j}\boldsymbol{F}_1{}^* \oplus \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}^* \oplus \boldsymbol{ij}\boldsymbol{F}_1{}^*$$

† は $\boldsymbol{F}_1$ 上では1，$\boldsymbol{j}\boldsymbol{F}_1$ 上では $\dagger\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\dagger$ より -1 であるが，これを $\boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}^*$, $\boldsymbol{ij}\boldsymbol{F}_1{}^*$ に拡張するときには $\dagger\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\dagger$（複素線形的拡張）とするか，$\dagger\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\dagger$（複素反線形的拡張）とするかによって話はかなり違ってくる．

そこで，話を一般にして，$\boldsymbol{F}_1{}^* = \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime}$, $\langle \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \cap \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime} \rangle_0 = 0$ と分解されているとし，† は $\boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}'$ 上では1，$\boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}''$ 上では -1 とする．これに調子を合わせて，$\boldsymbol{j}$ の方も，$u \in \boldsymbol{F}_1{}'$ に対しては，$\boldsymbol{ji}u = \boldsymbol{ij}u$, $u \in \boldsymbol{F}_1{}''$ に対しては $\boldsymbol{ji}u = -\boldsymbol{ij}u$ となるとしてみよう．そうすると，$\boldsymbol{E}^{2*}$ は

$$\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{j}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{ji}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime} \oplus \boldsymbol{ij}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime} \oplus \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime} \oplus \boldsymbol{j}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime}$$

と分解される．$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = -1$ であり，$\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{j}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} \oplus \boldsymbol{ji}\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime} = \boldsymbol{G}^{*\prime}$ と

すると，$\boldsymbol{G}^*$ は $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ を左から掛ける演算で閉じており，$\boldsymbol{G}^*$ 上では $(\boldsymbol{ji})^2=1$ となる．したがって，$\boldsymbol{G}^{*\prime}$ 上で $\boldsymbol{ji}$ の固有値は ± 1 であり，$\boldsymbol{jiF}_1{}^{*\prime}=\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime}$ がわかる．これより，

$$\boldsymbol{G}^{*\prime}=\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime}\oplus \boldsymbol{iF}_1{}^{*\prime}\oplus \boldsymbol{F}_1{}^{*\prime}\oplus \boldsymbol{jF}_1{}^{*\prime}$$

となり，$\boldsymbol{G}^{*\prime}$ は 2 つの複素線形空間の直和となる．

一方，$\boldsymbol{G}^{*\prime\prime}=\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime}\oplus \boldsymbol{ijF}_1{}^{*\prime\prime}\oplus \boldsymbol{iF}_x{}^{*\prime\prime}\oplus \boldsymbol{jF}_1{}^{*\prime\prime}$ も $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ を左から掛ける演算で閉じており，$\boldsymbol{G}^{*\prime\prime}$ 上で $(\boldsymbol{ij})^2=-1$ となり，$\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}$ となる．$\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{Ri}\oplus\boldsymbol{Rj}\oplus\boldsymbol{Rij}$ は 4 元数（quaternion）となるから，4 元数全体を $\boldsymbol{Q}$ と書けば，

$$\boldsymbol{G}^{*\prime\prime}=\boldsymbol{Q}\otimes\boldsymbol{F}_1{}^{*\prime\prime}$$

となる．$\boldsymbol{E}^{2*}{}_C$ からはこの他にも様々な代数がとび出してくる．このことは，$\boldsymbol{E}^2$ の側からでなく逆向きに考えてみれば当然のことで，初めから環 $\mathcal{R}$ と $\boldsymbol{F}_1$ とのテンソル積 $\mathcal{R}\otimes\boldsymbol{F}_1$ に，内積 $\langle\ ,\ \rangle_0$ の構造が入っているものを考えて，$\boldsymbol{E}=\mathcal{R}\otimes\boldsymbol{F}_1$ とすれば，$\boldsymbol{E}^{2*}{}_C$ から $\boldsymbol{C}\otimes\mathcal{R}$ のような代数が出てくるのは当然のことである

6° ゲージ群の考え方

現代の場の量子論において，数学的に見て最もぼやけてみえるのは，これまで $\boldsymbol{E}^2$ 上で述べてきた無限次元のハミルトン系を有限次元の多様体にまで簡約する原理である．

無論この原理がはっきりしたところで，それを $*$-積で読み直すという作業は残っているのだが，その手前がはっきりしなくては手の打ちようがない．

（A） まず考え方をはっきりさせよう．前節の $\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}\oplus J\boldsymbol{E}$ から出発し，J を使って $\boldsymbol{E}^2$ に複素構造を，上の分解を使って複素座標系を設定し，$C_\nu{}^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C$ の元について，これが正則関数かどうかが言える状態にしておこ

う．$\{E^s;\ s\in \boldsymbol{R}\}$ を **3°** で与えたILH-鎖（2章 **5°** 参照）とする．複素線形写像つまり，J と可換な実線形写像 $A:\ \boldsymbol{E}^2\to \boldsymbol{E}^2$ が **ILH-ユニタリー写像**であるとは，A が次の (a)，(b) をみたす場合を言う：

（a）各 $s\in \boldsymbol{R}$ に対して A は $(E^s)^2$ から $(E^s)^2$ への連続線形写像に拡張できる．（拡張されたものも同じ記号で表わす．）

（b）$A:\ (E^0)^2\to (E^0)^2$ は等長写像である．

A も A^{-1} もILH-ユニタリー写像であるものを **ILH-ユニタリー同形** と呼び，その全体のなす群を $\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ と表す．次の定理は自明であろう．

定理1 $\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ は，$\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)\nu=\nu$ となるように $C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に作用し，$\mathfrak{N}_{1,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$，$\mathfrak{N}_{\Omega,\nu}^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ を不変にする．しかも，$H,\ H'\in C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ に＊-積が定義されておれば，任意の $A\in\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ に対して，$A(H*H')=(AH)*(AH')$ が成立する．

（**B**）次に $H_0\in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ を1つ固定し，これをハミルトン関数と考えよう．H_0 が与えられれば，これを不変にする $\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ の部分群 $\mathcal{U}_{H_0}(\boldsymbol{E}^2)$ が考えられる．一般にゲージ群と呼ばれているものは $\mathcal{U}_{H_0}(\boldsymbol{E}^2)$ 自身か，またはかなり大きな $\mathcal{U}_{H_0}(\boldsymbol{E}^2)$ の部分群 $\mathcal{G}$ であるが，$\mathcal{G}$ を指定するということがほとんど $\boldsymbol{E}^2$ をどの多様体 N の上で書くべきかを指定することになってしまう，つまり，$\boldsymbol{E}$ を $C^\infty(N)$ とか，もう少し別のベクトル束の切断全体と見るかは線形空間 $\boldsymbol{E}$ を見ている限りでは全く自由であったが，$\mathcal{G}$ を指定するとこの自由度が消えて N が指定されてしまうと考えられているかに見える群である*)．

したがって，$\mathcal{G}$ がどのようにして N を指定するのかという部分を棚上げしてしまえば，指定されたはずの N から出発して微分幾何的に場の理論を書くこともできる．これがいわゆるゲージ理論であるが，ここではこの方向に

*）無論，この部分が大問題なのである．

進むのはやめて，むしろゲージ理論で棚上げされた部分を考えてみよう．

H_0 のことはしばらく忘れて，$\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ の部分群 $\mathcal{G}$ が与えられたとしよう．$\mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ の部分群 $\tilde{\mathcal{D}}$ ($\supset \mathcal{G}$) を

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{\, g \in \mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)\,;\; g\mathcal{G}g^{-1} = \mathcal{G} \,\}$$

で定義する．ゲージ群 $\mathcal{G}$ というのは単なる部分群ではなくかなり特殊なものの筈であるが，その特徴の 1 つは

（a） $\mathcal{G}$ は自然に $\boldsymbol{E}^2$ に作用しているが，余次元が有限の不変複素部分空間を持つ．

ということである．そこで，$\boldsymbol{E}^2$ より真に小さい $\mathcal{G}$ の不変部分空間のうち極大なものを選びこれを $\boldsymbol{E}_x{}^2$ とし，$V_x = \boldsymbol{E}^2/\boldsymbol{E}_x{}^2$ とする．

ところで，$\tilde{\mathcal{D}}$ も自然に $\boldsymbol{E}^2$ に作用しているが，これを使って，次のような好都合な仮定をしよう：

（b） 上の記号の下で，$\bigcap \{\, g\boldsymbol{E}_x{}^2;\; g \in \tilde{\mathcal{D}} \,\} = \{0\}$

$\mathcal{U}(\boldsymbol{E}^2)$ の部分群 $\mathcal{G}$ が上の (a)，(b) をみたすとき，**抽象的ゲージ群** と呼ぶことにしよう．

抽象的ゲージ群 $\mathcal{G}$ が与えられたとしよう．$\mathcal{G}$ は $V_x = \boldsymbol{E}^2/\boldsymbol{E}_x{}^2$ に作用しているが，$\mathcal{G}$ の元で V_x 上に恒等写像を引起すものの全体を $\mathcal{G}_x$ とする．$\mathcal{G}_x$ は $\mathcal{G}$ の正規部分群であり，$\mathcal{G}/\mathcal{G}_x$ は V_x 上のユニタリー変換群 $U(V_x)$ の部分群になっている．$G_x = \mathcal{G}/\mathcal{G}_x$ とおこう．さらに，$\tilde{\mathcal{D}}$ の部分群 $\tilde{\mathcal{D}}_x$ を，

$$\tilde{\mathcal{D}}_x = \{\, g \in \tilde{\mathcal{D}}\,;\; g\boldsymbol{E}_x{}^2 = \boldsymbol{E}_x{}^2 \,\}$$

によって定義し，剰余類の集合 $\tilde{\mathcal{D}}/\tilde{\mathcal{D}}_x$ を X とおく．位相に関して何も述べてきていないので，次の定理は数学的には単に物の考え方だけを述べている「擬定理」にすぎないが，あまりこだわらないことにしよう：

定理 2 （a） $\boldsymbol{E}^2$ は，X 上の V_x をファイバーとするベクトル束 V_X の切断の空間と同一視できる．

（b） $\mathcal{G}$ は X 上の G_x をファイバーとする群束 G_X の切断の空間と同一

視できる．G_X を **ゲージ・バンドル** と呼ぶ．

証明 $g \in \tilde{\mathscr{D}}$ に対し，$g\boldsymbol{E}_x{}^2$ は剰余類 $g\tilde{\mathscr{D}}_x$ にのみ依存するから，$y = g\tilde{\mathscr{D}}_x$ とし，$g\boldsymbol{E}_x{}^2 = \boldsymbol{E}_y{}^2$，$\boldsymbol{E}^2/g\boldsymbol{E}_x{}^2 = V_y$ と表わす．直和集合 $\bigcup\{V_y;\ y \in X\}$ を考えれば，これが X 上のベクトル束と考えられるから，これを V_X とする．$\boldsymbol{E}^2$ の任意の元 $\boldsymbol{u}$ に対し $\boldsymbol{u}$ を V_y に射影して考えることにより，V_X の切断が1つ得られる．V_X の切断の全体を $\boldsymbol{\Gamma}(V_X)$ とすると，条件 (b) により，$\boldsymbol{E}^2$ は $\boldsymbol{\Gamma}(V_X)$ の中に上の対応で自然に埋込まれている．

一方，$h \in \tilde{\mathscr{D}}_x$ に対して，$h\mathscr{G}_x h^{-1}$ は $\boldsymbol{E}_x{}^2$ を不変にしており，しかも $\boldsymbol{E}^2/\boldsymbol{E}_x{}^2$ 上に恒等写像を引起すから，$h\mathscr{G}_x h^{-1} = \mathscr{G}_x$ である．したがって，$g \in \tilde{\mathscr{D}}$ に対して $g\mathscr{G}_x g^{-1}$ を考えると，これは $\mathscr{G}$ の正規部分群で，しかも $y = g\tilde{\mathscr{D}}_x$ にのみ依存する．そこで，$\mathscr{G}_y = g\mathscr{G}_x g^{-1}$，$G_y = \mathscr{G}/\mathscr{G}_y$ とする．$\bigcap\{\mathscr{G}_y;\ y \in X\}$の元 $\boldsymbol{h}$ は，任意の V_y 上に恒等変換を引起すから，$\boldsymbol{E}^2$ 上の恒等写像となり，これより $\bigcap\{\mathscr{G}_y;\ y \in X\} = \{e\}$ ($e =$ 単位元)がわかる．そこで，直和集合，$\bigcup\{G_y;\ y \in X\}$ を考えれば，これは群 G_x をファイバーとする X 上の群束 G_X と考えられ，任意の $g \in \mathscr{G}$ は G_X の切断と自然に思うことができる．このようにして $g = \{g(y);\ y \in X\}$，$u = \{u(y);\ y \in X\}$ と思ったとき，$gu \in \boldsymbol{E}^2$ は $\{g(y)u(y);\ y \in X\}$ で与えられていることは言うまでもあるまい． □

また，各 $\boldsymbol{E}_y{}^2$ が複素線形部分空間であったから V_y も自然に複素線形空間となり，群 G_y は V_y にユニタリー群として作用していることもわかる．

これまでの文脈で言えば，X がコンパクト多様体 N となり V_X は N 上の C^∞ ベクトル束，G_X はコンパクト・リー群をファイバーとする N 上の C^∞ 群束となると考えられるから，ここを出発点にしてしまうのも悪いことではない．しかし，このような強い構造が，(a)，(b) という仮定だけから出てくることはないということを頭に入れておく必要がある．

次に複素共役写像 $\dagger$: $\boldsymbol{E} \oplus J\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \oplus J\boldsymbol{E}$ を $\dagger(u + Jv) = u - Jv$ で定義し，$A \in \mathscr{U}(\boldsymbol{E}^2)$ に対し，$A^\dagger = \dagger A \dagger \in \mathscr{U}(\boldsymbol{E}^2)$ と定義しよう．上で与えた $\mathscr{G}$，$\tilde{\mathscr{D}}$ に対して，$\mathscr{G}^\dagger = \{g^\dagger;\ g \in \mathscr{G}\}$，$\mathscr{D}^\dagger = \{g^\dagger;\ g \in \tilde{\mathscr{D}}\}$ と定義する．$\dagger\boldsymbol{E}_x{}^2$ は

複素線形部分空間であるから $\tilde{\mathscr{D}}^\dagger$, $\tilde{\mathscr{G}}^\dagger$, $\dagger\boldsymbol{E}_x{}^2$ を使って上と全く同様に話をしていくと, $X^\dagger = \tilde{\mathscr{D}}^\dagger/\tilde{\mathscr{D}}_x{}^\dagger$ 上の $G_x{}^\dagger = \mathscr{G}^\dagger/\mathscr{G}_x{}^\dagger$ をファイバーとする群束 $G_X{}^\dagger$ (これを G_X の**共役ゲージ・バンドル**と呼ぶ) 及び $X^\dagger$ 上の $V_x{}^\dagger = \boldsymbol{E}^2/\dagger\boldsymbol{E}_x{}^2$ をファイバーとするベクトル束 $V_X{}^\dagger$ が得られる. $\boldsymbol{E}^2$ の元は自然に $V_X{}^\dagger$ の切断の空間に埋込まれる.

ここで, 話を簡単にするために, $X = X^\dagger = N$ とし, V_N, $V_N{}^\dagger$ の C^∞ 切断の全体を $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$, $\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)$ とし, さらに, $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\Gamma}(V_N) = \boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)$ としよう. この場合, $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ と考えるのと $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)$ と考えるのとでは何が違うかというと, 複素構造が違っていて互いに共役の関係になっているのである. このことをもう少し詳しく説明しよう.

これまでも何度も使ってきたが, 場の理論の特徴は, $\{\delta_x\,;\, x \in N\}$ を $C^\infty(N)$ の基底と考えることである. この意味で $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ の基底を書くのは V_N が自明束でない場合には次のような少々手のこんだやり方にならざるを得ない. まず $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を N の開被覆とし, 各 U_λ 上では V_{U_λ} は自明束 $U_\lambda \times \boldsymbol{C}^m$ になるとする. $\boldsymbol{f}_1{}^{(\lambda)}, \cdots, \boldsymbol{f}_m{}^{(\lambda)}$ を $\boldsymbol{C}^m$ の標準基底とすると, $\boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\lambda})$ の基底は, $\{\boldsymbol{f}_i{}^{(\lambda)}\delta_x\,;\, x \in U_\lambda,\ 1 \leqq i \leqq m\}$ である. つまり, 任意の $\psi \in \boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\lambda})$ は次の形に書くことができる:

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \int_{U_\lambda} \psi_i(x)\, \boldsymbol{f}_i{}^{(\lambda)} \delta_x\, dV_x\,, \quad \psi_i(x) \in \boldsymbol{C}\,.$$

この場合, $\{\psi_i(x)\,;\, x \in U_\lambda,\ 1 \leqq i \leqq m\}$ は ψ の複素座標と考えられる. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ の所では V_{U_λ} と V_{U_μ} とは座標変換

$$\boldsymbol{f}_i{}^{(\mu)} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(x)\, \boldsymbol{f}_j{}^{(\lambda)}, \qquad x \in U_\lambda \cap U_\mu\,,\ (g_{ij}(x)) \in U(m)$$

によって貼り合わされているから, これを使って, $\boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\lambda})$ の基底と, $\boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\mu})$ の基底を次の関係式で同一視する:

$$\boldsymbol{f}_i{}^{(\mu)} \delta_x = \sum_{i=1}^{m} g_{ij}(x)\, \boldsymbol{f}_j{}^{(\lambda)} \delta_x\,, \qquad x \in U_\lambda \cap U_\mu\,.$$

これは，基底 ($\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n$) と ($\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_m'$) とを $\boldsymbol{e}_{n-1} = \alpha \boldsymbol{e}_1' + \beta \boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_n = \gamma \boldsymbol{e}_1' + \delta \boldsymbol{e}_2'$ ($\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$) なる関係でつないで $m + n - 2$ 個の基底を作っているようなものであるが，このように貼りつけることで，複素基底が得られていることは明らかであろう．$\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ 内を動きまわる変数 ψ はこのような意味で複素変数と考えられるのである．$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ として，ψ に対して $\boldsymbol{E}^2$ 上で $\psi^\dagger$ を考えれば，これは $\boldsymbol{\Gamma}(V_N^\dagger)$ 内を動きまわる共役複素変数と思うことができる．

交換関係は，前節の定理3を使うと，**4°**,（10）と同じ解釈で，

$$\begin{cases} [\,\widehat{\psi}_i^{(\lambda)}(x),\ \widehat{\psi}_j^{(\mu)}(y)\,] = [\,\widehat{\psi}_i^{\dagger(\lambda)}(x),\ \widehat{\psi}_j^{\dagger(\mu)}(y)\,] = 0 \\ [\,\widehat{\psi}_i^{(\lambda)}(x),\ \widehat{\psi}_j^{\dagger(\mu)}(y)\,] = 0 \qquad (\,U_\lambda \cap U_\mu = \phi\,) \\ [\,\widehat{\psi}_i^{(\lambda)}(x),\ \widehat{\psi}_j^{\dagger(\lambda)}(y)\,] = 2\nu\sqrt{-1}\,\delta_{ij}\delta_y(x) \end{cases}$$

と与えられる．ただし，$\widehat{\psi}_j^{(\lambda)}(x)$ などは，$\psi \mapsto \psi_j^{(\lambda)}(x)$ ($\in \boldsymbol{C}$) という関数を表わす．上の交換関係は特に，$C^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C$ の元で ψ のみの関数 (ψ を複素変数と思っていることに注意) として書けるものは $*$-積に関して可換となることを意味する．

さて，最初にとったハミルトン関数 H_0 はエルミート元のはずであるが，上のような述べ方で V_N, $V_N^\dagger$ を作った場合，どこに入っていることになるのだろうか？ $H_0 \in C^\infty(\boldsymbol{E}^2)$ でしかないのだから V_N, $V_N^\dagger$ とは何の関係もないと言って良いのかも知れないが，良くわかっていないように思われる．

7° 複素 Klein-Gordon（クライン・ゴルドン）場

話をもう少し具体的にしよう．N はコンパクト C^∞ リーマン多様体，V は複素 k 次元ベクトル空間，$U(k)$ は k 次のユニタリー行列の全体とする．$U(k)$ はリー群をなすが，$U(k)$ のリー環を $S(k)$ とする．$S(k)$ は歪エルミート行列の全体である．

V_N を，V をファイバーとする N 上の複素ベクトル束，$V_N{}^\dagger$ を V_N の共役ベクトル束とする．V_N においては V_{U_λ}（$=U_\lambda\times V$）と V_{U_μ} の間の座標変換は $U_\lambda\cap U_\mu$ 上の $U(k)$-値関数 $\theta_{\lambda\mu}$ をかけることで得られているのに対し，$V_N{}^\dagger$ ではそれが $\bar{\theta}_{\lambda\mu}$ をかけることに変っているのである．

$\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$，$\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)$ を V_N，$V_N{}^\dagger$ の C^∞ 切断全体のなす複素線形空間とする．$u\in\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ は各 U_λ 上では $\boldsymbol{C}^k$-値関数で，これらが $U_\lambda\cap U_\mu$ 上では $\theta_{\lambda\mu}$ で貼りついているものと理解できるから，$u\in\boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\lambda})$ に対して，$\bar{u}\in\boldsymbol{\Gamma}(V_{U_\lambda}{}^\dagger)$ を対応させることにより自然に $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ から $\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)$ の上への複素反線形写像 † が存在する．これは同時に，$\dagger$：$\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)\to\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ も存在することを意味する．各 U_λ 上で $u\in\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ を $u(x)=(u^1(x),\cdots,u^k(x))$ と成分表示すれば，$u^\dagger(x)=(\bar{u}^1(x),\cdots,\bar{u}^k(x))$ であり，これより，$u,v\in\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ に対して

$$(1)\qquad (u\cdot v^\dagger)(x)=\sum_{i=1}^{k}u^i(x)\,\bar{v}^i(x)$$

は N 上で定義された $\boldsymbol{C}$-値関数であることがわかる．特に $u\cdot u^\dagger\geqq 0$ でもある．さらに，(1) を使ってエルミート内積を

$$(2)\qquad \langle u,v\rangle_0=\int_N(u\cdot v^\dagger)(x)\,dV_x$$

と定義し，$\|u\|_0=\langle u,u\rangle_0{}^{1/2}$ を使って $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ を完備化したものを $\Gamma^0(V_N)$ とする．同様に $\Gamma^0(V_N{}^\dagger)$ も定義する．$\Gamma^0(V_N)$ も $\Gamma^0(V_N{}^\dagger)$ も複素ヒルベルト空間である．

次に，$(\boldsymbol{\Gamma}(V_N),\Gamma^0(V_N))$ と $(\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger),\Gamma^0(V_N{}^\dagger))$ とを複素線形空間の組として同一視することを考えるのだが，特に同一視を与える複素線形写像 i：$\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)\to\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ が次の性質を持つようにする：

（a） i：$\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger)\to\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ は位相まで込めて複素線形同形写像であり，かつ $\Gamma^0(V_N{}^\dagger)$ から $\Gamma^0(V_N)$ の上への等長変換に拡張される．

（b） $(\dagger i)(\dagger i)=1$

上のような i は $\Gamma^0(V_N{}^\dagger)$ の正規直交基底 $\{e_n{}^\dagger\}_{n\in N}$ で，$e_n{}^\dagger \in \Gamma(V_N{}^\dagger)$ となるものを選び，$i(e_n{}^\dagger) = e_n{}^{\dagger\dagger}$ $(= e_n)$ とおき，これを複素線形に拡張すれば得られるが，この他にもたくさんの作り方がある．（例えば，$i(e_n{}^\dagger) = e^{\sqrt{-1}\,\theta_n}e_n$ としても良い．）

ともあれ，上のような i で $\Gamma(V_N{}^\dagger)$ と $\Gamma(V_N)$ とを同一視し，同一視された空間を E^2 と書くことにする．写像 $\dagger$ は E^2 上の実線形写像 $\dagger$： $E^2 \to E^2$ に翻訳され，$\dagger^2 = 1$ であり，$\dagger$ が反線形だったことを反映して，$\dagger$： $E^2 \to E^2$ も反線形，つまり，

（3） $\dagger\cdot\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}\cdot\dagger$ 　　（$\dagger J + J\dagger = 0$ と同じこと．）

となる．

ゲージ群は，前節での V_N，$V_N{}^\dagger$ の作られ方から逆算すると，次のようなものであることがわかる： V_N は適当に C^∞ なエルミート内積を選ぶことにより計量付きのベクトル束として良い．各 $x \in N$ に対し，x 上のファイバーを V_x とし，V_x 上のユニタリー変換の全体を G_x とする．直和集合 $G_N = \cup\{G_x;\ x \in N\}$ は自然に N 上の C^∞ な群束となるから，G_N の C^∞ 切断の全体を $\mathcal{G}$ とする．これがゲージ群である．

次に $\tilde{\mathcal{D}}$ を V_N から V_N の上への C^∞ 同相写像で次の性質を持つものの全体とする：

（a） $\tilde{\varphi}$： $V_N \to V_N$ に対し，C^∞ 同相 φ： $N \to N$ が存在し，任意の $x \in N$ に対して，$\tilde{\varphi}(V_x) = V_{\varphi(x)}$ が成立し，

（b） $\tilde{\varphi}$： $V_x \to V_{\varphi(x)}$ はユニタリー変換となる．

定義から $\mathcal{G}$ は $\tilde{\mathcal{D}}$ の正規部分群である．

前節の $\mathcal{G}_x$ に相当するのは，

$$\mathcal{G}_x = \{\, g \in \Gamma(G_N)\,;\ g(x):\ V_x \to V_x \text{ が恒等写像}\,\}$$

であり，$\tilde{\mathcal{D}}_x$ に相当するのは

$$\tilde{\mathcal{D}}_x = \{\, \tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{D}}\,;\ \tilde{\varphi}(V_x) = V_x\,\}$$

てある．

補題 1 N が連結ならば $\tilde{\mathscr{D}}/\tilde{\mathscr{D}}_x = N$ である．

証明 N が連結のとき，任意の $y \in N$ に対して，$\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathscr{D}}$ があって，$\tilde{\varphi}(V_x) = V_y$ とできれば良い．これには V_N 上の接続を使う．2 章 **9°** で述べたように接続を与えるということは N 上の曲線 $c(t)$ に沿って $V_{c(0)}$ の元を $V_{c(1)}$ の所まで平行移動するしかたを与えることである．これを τ_c: $V_{c(0)} \to V_{c(1)}$ としよう．任意の C^∞ 級曲線 c に対して τ_c: $V_{c(0)} \to V_{c(1)}$ がユニタリー変換となるようなものをユニタリー接続と呼ぶが，ユニタリー接続は実は必ず存在するので，こういうものを 1 つ選んで，これを使って話を進める．

各曲線に対して τ_c を与えることは不可能だから，実際には，無限小の平行移動を与えておいて，そこから微分方程式を解いて τ_c が与えられるようなしかけにする．T_pN の元を X，V_p の元を $\boldsymbol{v}$ としたとき，$\boldsymbol{v}$ を点 p から X だけ無限小平行移動したもの $\tau_X(\boldsymbol{v})$ は

$$\tau_X(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} X^i \Gamma_i(p)\,\boldsymbol{v}$$

で与えられる．ただし，$X = \sum X^i \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ で，$\Gamma_i(x)$: $V_p \to V_p$ は歪エルミート変換である．複素基底をとって V_p を $\boldsymbol{C}^k$ と同一視しておけば，$\Gamma_i(p)$ は歪エルミート行列である．

さて，N が連結だから，任意の $y \in N$ に対して，$t \in [0, 1]$ に C^∞ に依存する 1 径数の C^∞ 同相 φ_t: $N \to N$ で，$\varphi_0 = 1$（恒等写像），$\varphi_1(x) = y$ となるようなものが存在する．（この証明は少し工夫が要る．）

そこで，各 $p \in N$ に対し，曲線 $c_p = \{\varphi_t(p)\,;\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ を考え，τ_{c_p}: $V_p \to V_{\varphi_1(p)}$ を考える．p を動かして考えればこれが $\tilde{\mathscr{D}}$ の元 $\tilde{\varphi}$ を与えており，しかも $\tilde{\varphi}(V_x) = V_y$ となることがわかる． □

話をもとに戻して，i: $\boldsymbol{\Gamma}(V_N{}^\dagger) \to \boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ によって同一視された空間 $\boldsymbol{E}^2$ を考えよう．$\dagger$ の固有空間分解を使えば，$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{F}_1 \oplus \sqrt{-1}\,\boldsymbol{F}_1$ と書けるのであるが，この $\boldsymbol{F}_1$ という空間は V_N とか $V_N{}^\dagger$ とかのレベルでは書きにくいもの

である．$\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ は複素線形空間で，この意味では（∞次元の）複素多様体であり，前節で述べた $*$-積の交換関係を考えればケーラー多様体と呼んでも良いものであるが，実部は極めて見えにくくなっているのである．

$C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C$ 内のエルミート元全体の集合 $\sum_H(\boldsymbol{E}^2)$ を考えてみよう．ψ を $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ 内を動きまわる変数（複素変数）とすると，任意の $H \in C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C$ は，$H = H(\psi, \psi^\dagger)$ と書かれており，

$$H(\psi, \psi^\dagger) = \langle u, \psi\rangle_0 + \langle u^\dagger, \psi^\dagger\rangle_0$$

のように，$\bar{H} = H$ となるものがエルミート元である．特に，$\boldsymbol{E}^2$ 上の $\boldsymbol{R}$-値 C^∞ 関数は全部エルミート元である．しかし，$\sum_H(\boldsymbol{E}^2)$ が全体としてどういう構造をしているかとか，$*$-積が定義できるものの中で，$\circ$-積に関して極大な，結合律をみたす代数がどのようなものかなどについては全くわかっていないのが現状である．

次に，ゲージ群 $\mathcal{G}$ の元を「座標変換」と考える考え方を説明しよう．これまでの述べ方では $\mathcal{G}$ の元 g は $\boldsymbol{E}^2$ に作用する変換として扱われ，u と gu とは $\boldsymbol{E}^2$ 内の別の元と考えられてきたのであるが，これを，「u も gu も何か別の所にある元 $\tilde{u}$ の表示の違い，つまり，gu は g という座標系で見たときの $\tilde{u}$ の表示である」というように考えよう．これは数学的には次のようにすることである：

直積 $\mathcal{G} \times \boldsymbol{E}^2$ を考え，この上に次で同値関係を入れる：

$(g, u) \sim (h, v)$ とは，$gu = hv$ の場合を言う．

$\sim$ が同値関係であるのは明らかである．$\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ をこの同値関係による同値類の集合とすると，$\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ は自然に複素線形空間の構造を持つ．$\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ の元 $\tilde{u}$ は，$\tilde{u} \ni (g, u)$ とすれば，$g \in \mathcal{G}$ をきめたときに，$u \in \boldsymbol{E}^2$ という表示を持つものと理解できる．さらに，$g \in \mathcal{G}$ に対して $g^\dagger$ を対にして同値関係を定義すれば $\dagger$: $\tilde{\boldsymbol{E}}^2 \to \tilde{\boldsymbol{E}}^2$ が複素反線形写像として意味を持つようにできる．

しかし，$H \in C_\nu^\infty(\tilde{\boldsymbol{E}}^2)^C$ を $\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ 上を動く変数を使って書くのは難しいか

ら，普通は $g \in \mathcal{G}$ を固定し（これを「ゲージを固定する」と言う），$\boldsymbol{E}^2$ 上で $C_\nu^\infty(\boldsymbol{E}^2)^C$ の元として“表示”するのである．

実は，複素クライン・ゴルドン場というのは，以下で述べるようなハミルトン関数 $H_0 \in \sum_H(\tilde{\boldsymbol{E}}^2)$ によって支配される場のことを言うのである．しかし，H_0 を与えるときにはゲージを固定し，$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ 上で表示を与えるのである．

以下では，$V_N = V'_N \oplus JV'_N$ と分解できるものとしよう．ψ を $\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ 内を動く複素変数とし，上の分解にしたがって，

$$\psi = \varphi + J\pi, \qquad \varphi,\ \pi \in \boldsymbol{\Gamma}(V'_N)$$

とする．しかし，一般に，$\varphi^\dagger \neq \varphi$, $\pi^\dagger \neq \pi$ であるから注意が要る．$\psi^\dagger = \varphi^\dagger - J\pi^\dagger$ である．H_0 は

$$H_0(\psi, \psi^\dagger) = \int_N (\pi(x)\cdot\pi^\dagger(x) + m^2\varphi(x)\cdot\varphi^\dagger(x) + \langle(\nabla\varphi)(x), (\nabla\varphi)^\dagger(x)\rangle)\, dV_x$$

で与えられる．ただし，∇ は V_N 上で任意に与えたユニタリー接続による共変微分で，$\langle\ ,\ \rangle$ は N のリーマン計量による内積である．上の書き方は N の局所座標系のとり方に依存して見えるが，被積分関数は実は N 上の関数として意味を持つ．

これでわかるように，H_0 の中にはまだ，N 上のリーマン計量，V_N のユニタリー接続という勝手に選んで良いものが入っている．このことは $k=1$ の場合でも全く同じであって，この場合には ψ は $\boldsymbol{C}$-値関数ではなく V_N の切断だから，接続がきまっていないと $\nabla\varphi(x)$ には意味がなくなるのである．

こうして，複素変数にまで話を広げてきたおかげで，エルミート元を書くときに，ユニタリー接続の部分だけの自由度が獲得できたことになる．電磁場との相互作用を考えるには実はこの部分の自由度を利用するのであって，$k=1$ の場合に，∇ の係数を電磁ポテンシャルと解釈する．つまり局所座標系を使って

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}A_i$$

と書いたとき，$\sum_{i=1}^{n} A_i dx^i$ を電磁ポテンシャルと解釈するのである．

量子化された正準方程式は，クライン・ゴルドン方程式の場合とほとんど同じだが，φ, π がエルミート元でなくなったので，(φ, π) について書いた式と，$(\varphi^\dagger, \pi^\dagger)$ について書いたのとで少し違ってくる．このずれの物理学的解釈は数学の側から見ても極めて面白いのだがここでは上手に述べることができない．物理学的解説は

高橋　康，古典場から量子場への道，講談社サイエンティフィク，pp. 153- 155.

にあるが，数学的に見ても示唆に富んでいる．

8° 点とは何だろう

最後に，この本の主題の1つであった「点とは何か」ということについて筆者のおぼろげな考え方を述べねばなるまいと思われる．この部分は一定の考え方というのがまだ存在しておらず，常に揺れ動いている部分であるが，この部分こそが場の理論と幾何学の接点なのである．

（**A**） まず，ゲージ群について考えてみよう．言うまでもなく，場の理論は，数学的には $\boldsymbol{E}^2$ または $\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ 上で書かれたハミルトン系の形をしており，原理的にはそれを変形し，$*$-積で解釈し直したものが量子場の理論であるとこの本では考えている．この解釈は，物理的に述べられている事を一寸だけ数学的に言い直したもので別段新しい考え方でもないし，物理的に新しいものを主張しているわけでもない．

ところで，$\boldsymbol{E} = C^\infty(N)$ と思ったり $\boldsymbol{E} = C^\infty(N')$ と思ったりすることは自

由であって，これは $\boldsymbol{E}^2$ の正準座標系を指定することに対応していた．$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ と考えるときも同様で，これは $\boldsymbol{E}^2$ の複素座標系を指定することに対応していた．このように，単に座標系を指定することだけの目的ならば，N のとり方は全く自由である．

ゲージ群というのは，この座標系の自由さに一定の枠をはめてしまうものと理解されるが，**6°** で述べた $X=\tilde{\mathscr{D}}/\tilde{\mathscr{D}}_x$ が有限次元多様体になるということは，$\mathscr{G}$ や $\tilde{\mathscr{D}}$ が無限次元リー群と呼べるようなうまい性質を持っていたとしても，一般には期待できないように思われる．

そうだとすると，**7°** で述べたような描像にいきなり短絡してしまうのはかなり乱暴な話であって，ここに達する間にまだ様々なものが隠されていると思われる．例えば2章 **12°** で述べた超代数もこの部分に自然に隠されていると考えられるが，はっきりしたことはわからない．

いずれにしろ，X が複数の有限次元多様体に結びついている可能性は否定できないわけである．

さらに，ハミルトン関数を与えるという段になると，N を指定するだけでなく，N 上の様々な構造までも指定されていなければ，これを一意的に書くことができない．例えば，$\int_N \langle(\nabla\varphi)(x),\ (\nabla\varphi^{\dagger})(x)\rangle\, dV_x$ は dV_x は別にしても，ユニタリー接続 ∇ とか，リーマン内積 $\langle\ ,\ \rangle$ がきまっていなければ意味をなさない．

ここで普通に行われていることは，前節の $\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ と同じ考え方に立って，例えば，ゲージ変換で移りあう2つの接続は，実は同一の接続の違う座標系による表示であるとする考え方である．ゲージ群 $\mathscr{G}$ の意味が $\boldsymbol{E}^2$ 上の変換群から，$\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ 上の座標変換群へと立場をすりかえているのである．

これは，仮に $X=N$ だとして，N 自身は $\mathscr{G}$ によってきめられるとしても，N 上の様々な構造は $g\in\mathscr{G}$ を固定しなければ具体的には表示できないと考えていることを意味する．

(**B**)　N は素朴な意味では配位空間と思われている多様体であるが，(**A**) で述べたように，この N が $\boldsymbol{E}^2$ とか $\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ から自然に得られるということはほとんどないように思われる．それにもかかわらず，通常の場の理論では点集合としての N が絶対視されて登場してきている．その部分を少し解説してみよう：　通常の場の理論では $\boldsymbol{E}^2$ の側から書き始めたりしないで，まず，配位空間として，点集合としての位相空間 N を想定する．すべてはこの N を基礎 (土台) にして書かれているのである．

まず，$\{\delta_x ; x \in N\}$ を基底と考える．これに正確な意味を持たせるには N が C^∞ 多様体の構造を持たねばならないが，C^∞ 構造はあくまで補助的なものである．$x \in N$ は基底の番号を表わしているようなもので，この点集合としての N が何よりも優先して存在しなければならない．N がきまれば，その上にベクトル束とか，内積といった構造をのせていくことができるから，$\boldsymbol{\Gamma}(V_N)$ のようなものも考えられるようになる．通常の場の理論は，このように，まず N を想定してその上で論じられる．

これは，数学の中での多様体の定義においてもやられていることで，最初に点集合としての位相空間を想定し，それに局所座標系を入れていく考え方をする．しかし，多様体を定義するには最初に位相空間を持ちださない別のやり方もできる．これは，多様体とは単に局所座標系を貼り合わせただけのもので，位相空間としての構造は貼り合っている局所座標系の方から自然に得られるとする考え方である．つまり，多様体の定義のためには座標変換さえ与えられておれば十分で，点集合としての位相空間を最初に想定しなくても良いとする考え方である．

この2つは，座標変換が点という概念を保存しているような世界で話をしている限りでは単なる趣味の違いでしかないが，ワイル多様体のような所での座標変換とか，$C^\infty(N)$ を $C^\infty(N')$ とを同一視するといった“座標変換”を問題にし始めると話は変ってくる．δ_x, $x \in N$, は $C^\infty(N)$ と $C^\infty(N')$ とを線形的に同一視して N' 上で見た場合には，一般に N' 上の δ-関数にはならな

い．

ゲージ群はどこかの多様体上の $\{\delta_x;\ x\in N\}$ を保存するものだと気楽に考えても良いかもしれないが，そのようなゲージ群を $\boldsymbol{E}^2$ の側からしぼり込んでくることができていないのだから，今のところはどう考えて良いのかわからない．

（**C**） 天降りに N を考えてしまうことの欠点は次のような所にも現れている．前節で，複素クライン・ゴルドン場がどのようにして電磁場と相互作用するのかを述べたのであるが，このときの考え方は，電磁場の中での量子力学を考えるときの考え方とはっきり違っている．

電磁場の中での量子力学の考え方は，2 章 **6°** での考え方と同じで，電磁場の存在は，正準構造を変化させる．これに対して，複素クライン・ゴルドン場では電磁場がどう変ろうと，$\tilde{\boldsymbol{E}}^2$ の正準構造は何の影響も受けず，単にハミルトン関数が変化するだけとして書かれている．

この違いは，2 章 **6°** では，まだ運動量を表わす変数がワイル代数の中に残っていたのに対し，クライン・ゴルドン場では運動量を表わす変数はシュレーディンガー的に空間微分におき代っていることによる違いである．

ワイル代数の立場というのは，ほとんどハイゼンベルグの立場と同じことであるが，この立場で徹底しようとするならば，クライン・ゴルドン方程式の中に現れる空間微分 $\nu\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ もワイル代数の中での $\mathrm{ad}(y_i)$ と解釈して y_1, $\cdots$, y_n を含むワイル代数で考えなければならないはずである．この場合，y_1, $\cdots$, y_n は N の局所座標関数 x_1, $\cdots$, x_n と正準共役でなければならない．

ところが，このような徹底した立場をとることは現段階では極めて難しいものだから，今のところ場の量子論は，量子力学のシュレーディンガー描像の上に無限生成のハイゼンベルグ描像を接木したような，数学的には何とも奇妙な構造になっているのである．これも，N を最初から考えてしまう結果のように筆者には思われる．

この辺のことを数学的に正確にやるにはどうしても，N の存在を仮定しないで，無限次元的な所から出発し，場の理論の要請を入れながら，最後に古典的一側面として N が出てくるという理論構成にしなければいけないと思われるのであるが，出発点となるべき（と私は思っている）無限次元リー群論の方がまだあまり進んでいないので今のところあまり見るべき結果はない．

索　　引

ク

ケ　コ

サ

シ

セ

ヤ　ヨ

ラ

リ　ル　レ

ワ

著 者 略 歴

1938年 兵庫県生れ．1961年 東京大学理学部数学科卒業．東京都立大学理学部助手，講師，助教授，岡山大学教養部教授を経て，現在 東京理科大学理工学部教授．理学博士．

著書： Infinite dimentional Lie transformation groups, Springer Lec. Note, 無限次元 Lie 群論（紀伊國屋数学叢書）

定価 4429 円
（本体 4300 円）

一般力学系と場の幾何学

1991年 9月 5日 第1版 印 刷
1991年 9月10日 第1版 発 行©
1991年12月10日 第2版 発 行

| 検 印 |
| 省 略 |

著 作 者　大 森 英 樹

発 行 者　吉 野 達 治

発 行 所　東京都千代田区四番町8番地
電 話 東 京 3262－9166～9
株式会社 裳 華 房

印 刷 所　中 央 印 刷 株 式 会 社

製 本 所　株式会社 青 木 製 本 所

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4－7853－1069－3

Printed in Japan